

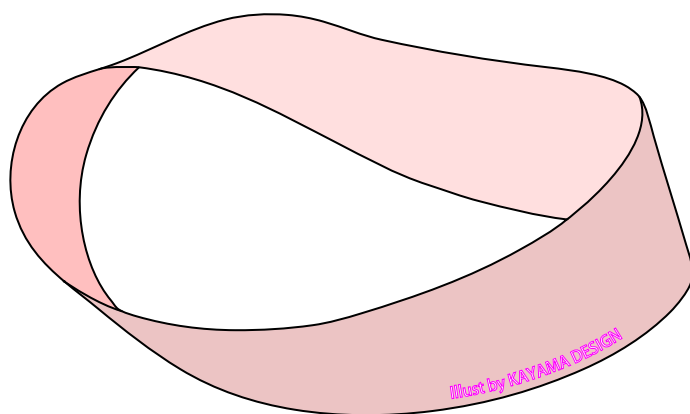
授業プラン（対象：小学校 4 年生以上）

2008 年 9 月 23 日 初版  
2015 年 3 月 16 日 (1.2.1)

©科学的授業実践研究会

# ふしぎな輪

— メビウスの<sup>おび</sup>帯 —



年 組

名前

※このページは教師用です。子どもたちには配布しません。

## マジック 1 の用意

- ①赤・青・黄の紙テープを用意します。
- ②それぞれ 60cm の長さに切り取ります。
- ③赤の紙テープは、ひねりを入れずに、のり付けをして輪を作ります。  
青の紙テープは、半回転ひねりを入れて、のり付けをして輪を作ります。  
黄の紙テープは、1 回転ひねりを入れて、のり付けをして輪を作ります。

## マジック 1 の留意点

それぞれの紙テープは、ひねりがちがっていますが、そのひねりの違いが目立たないように、3つの輪を子どもたちに提示します。そのため、ひねりを入れていない輪を提示する時、輪の上の方を裏返すようにして持ち、全体にひねりがあるように見せます。

## マジック 2 の用意

- ①色画用紙を 2 色用意します。
- ②長手方向に 5cm の幅で、各色 2 枚ずつ切り取ります。
- ③違う色どうしを重ねます。  
重ねたまま曲げて普通の輪を作ります。テープの先は重ねないで、外側・内側からそれぞれセロハンテープでとめます。  
メビウスの帯も作ります。同じく、テープの先は重ねないで、外側・内側からそれぞれセロハンテープでとめます。

## マジック 2 の留意点

メビウスの帯の方は、とても分解しやすいので、演じる時は教師が両手で持ちます。この時使う棒(鉛筆など)は、児童に持たせるとよいでしょう。

## 輪に使用する紙について

子どもたちと学習を進める際に使う輪を作る紙は、市販の紙テープ(幅が 18mm の物しかないようです)では細いようです。

そこで、A4用紙（210mm × 297mm）の210mmの方を8等分して、長さ297mmのテープ状のものにして使います。主に白の上質紙を使えばよいのですが、ピンク・ブルー・イエローの色上質紙で作ったテープも用意しておくといよいでしょう。授業プランの中に色テープを半分の幅にして使うところがありますし、適時学習に変化もつけられます。

テープは、1人あたり17本（色テープも含めて）が必要です。少し余裕を持って準備しておきましょう。

## 子どもが学習に使うもの

通常の筆記用具の他は

はさみ   のり   色鉛筆   長めの定規（できれば30cm）  
セロハンテープ

## マジック 1

### 【質問 1】

ここに赤色の紙テープで作った輪わと、青色の紙テープで作った輪わと、黄色の紙テープで作った輪わがあります。

これから、これらの紙テープの真ん中をはさみで切ってみます。まず、赤のテープを切ってみます。こんなふうに……(おまじないを言いながら)。

どうなると思いますか。

少しだけ予想よそを出し合っておきましょう。

おまじないを言いながら、赤のテープを真ん中で切ると、元と同じ大きさで、はばが半分の2つの輪ができました。

しつもん  
**【質問2】**

では、今度は青のテープの真ん中を切ってみます。やはりこんなふうに……（今度はちがうおまじないを言いながら）。

どうなると思いますか。

少しだけ予想よそを出し合っておきましょう。

おまじないを言いながら、青のテープを真ん中で切ると、元の2倍の大きさで、はばが半分の1つの輪ができました。

しつもん  
**【質問3】**

では、今度は黄色のテープの真ん中を切ってみます。やはりこんなふうに……（今度はまたちがうおまじないを言いながら）。

どうなると思いますか。

少しだけ予想よそうを出し合っておきましょう。

おまじないを言いながら、黄色のテープを真ん中で切ると、元と同じ大きさで、はばが半分の2つの輪ができました。ただ今度は、この2つの輪は、つながっています。

### 【問題 1】

では、はじめは同じ輪だったはずの3つの輪から、どうしてちがう輪ができたのでしょうか。

あなたはどう思いますか。

### 予想

ア ちがうまじないをかけたから ( ) 人

イ もともと輪の何かがちがっていたから ( ) 人

ウ その他 ( ) ( ) 人

### 予想の理由

### 話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

## マジック 1 のたね明かし

マジックにはかならずたねがあります。マジックは、まじないのような言葉でできるものではありません。そうなるには、かならず仕かけがあります。

それでは、先生がしてくださった不思議な輪のマジックに、君たちもちょうせんしてみましょう。

まず、先生からテープをいただきましょう。このテープのはしにのりをつけて輪にしましょう（まだ切ってはいけません）。

### 【問題 2】

この輪のテープの真ん中をはさみで切ります。どうなると思いますか。

### 予想

ア 元と同じ大きさで、はばが半分の 2 つの輪ができる。

2 つの輪は、はなれている。（赤のテープと同じ）

（ ）人

イ 元の 2 倍の大きさで、はばが半分の 1 つの輪ができる。

（青のテープと同じ）

（ ）人

ウ 元と同じ大きさで、はばが半分の 2 つの輪ができる。

2 つの輪は、つながっている。（黄色のテープと同じ）

（ ）人



## 予想の理由

## 話し合い

みんなの考えを出し合ひましょう。

では、実さいに切ってみて、たしかめましょう。テープを切り始める時には、テープの一か所を軽くおるようにして、そこを切ってから全体へ切り進むようにしましょう。

## 結果

輪になったテープの真ん中を切ると、元と同じ大きさで、はばが半分の2つの輪ができます。テープを半分に切ったのですから、この2つの輪は、はなれていても何ら不思議なことはありません。

では、今度は、テープのかた方のはしを1回転（うらを表にしてさらにうら返すということ）させてから輪を作ってみましょう（まだ切ってはいけません）。

### 【問題3】

この輪のテープの真ん中をはさみで切ります。どうなると思いますか。

#### 予想

ア 元と同じ大きさで、はばが半分の2つの輪ができる。

2つの輪は、はなれている。(赤のテープと同じ) ( )人

イ 元の2倍の大きさで、はばが半分の1つの輪ができる。

(青のテープと同じ) ( )人

ウ 元と同じ大きさで、はばが半分の2つの輪ができる。

2つの輪は、つながっている。(黄色のテープと同じ) ( )人

#### 予想の理由

#### 話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

では、実さいに切ってたしかめましょう。

#### 結果

1 回転ねじった輪のテープの真ん中を切ると、元と同じ大きさで、はばが半分の2つの輪ができます。この2つの輪は、つながっています。

では、今度は、テープのかた方のはしを半回転（うらを表にするということ）させてから輪を作ってみましょう（まだ切ってはいけません）。

#### 【問題 4】

この輪のテープの真ん中をはさみで切ります。どうなると思いますか。

#### 予想

ア 元と同じ大きさで、はばが半分の2つの輪ができる。

2つの輪は、はなれている。(赤のテープと同じ) ( ) 人

イ 元の2倍の大きさで、はばが半分の1つの輪ができる。

(青のテープと同じ) ( ) 人

ウ 元と同じ大きさで、はばが半分の2つの輪ができる。

2つの輪は、つながっている。(黄色のテープと同じ) ( ) 人

#### 予想の理由

#### 話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

では、実さいに切ってたしかめましょう。

#### 結果

半回転ねじった輪のテープの真ん中を切ると、元の2倍の大きさのはばが半分の1つの輪ができます。

ここで不思議なことに気づきます。輪になっているテープを半分に切るのですから、2つに分かれることと、はばが半分の同じ大きさの輪ができることはわかります。ですから、ねじれない輪と1回転ねじった輪のテープを半分に切った時、つながっているかどうかのちがいはありましたが、元と同じ大きさの2つの輪ができたのですから、まだ何となくなぜなのかわかるような気がします。

でも、半回転のねじれのある輪の場合は、テープを半分に切ったのに、1つの輪のままで、しかも2倍の大きさになったのですから、とても不思議です。

そこで、この半回転のねじれのある輪について、もっとくわしく調べてみましょう。

先生からテープをいただいて、ねじれのない輪を作りましょう。

この輪の表を、一方方向へ、うすく赤えん筆でぬっていきましょう。ぬり終わったら、赤えん筆をしまっておきましょう。

次に、もう一本先生からテープをいただいて、今度は半回転ねじれのある輪を作りましょう。輪が作れたら、その輪をよくかんさつしましょう（まだ色はぬりません）。

### 【問題 5】

この輪の表を、一方方向へ、うすく赤えん筆でぬっていくとどうなると思いますか。

#### 予想

- ア 表だけ赤くぬれる ( ) 人  
イ 表もうらも赤くなる ( ) 人  
ウ その他 ( ) ( ) 人

#### 予想の理由

#### 話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

では、実さいにぬってみて、たしかめましょう。

#### 結果

## 【お話】

### メビウスの帯おび

とても不思議なことが起こりました。表をぬっていたはずなのに、いつの間にかうらをぬっているのです。それなのに、またぬり始めた表にもどってきます。

これはいったいどういうことなのでしょう。

このことをテーマに研究した学者がいます。ドイツの天文てんもん学者・数学者すうがくのアウグスト・フェルディナント・メビウスと、同じくドイツの数学者のヨハン・ベネディクト・リ스팅グです。この二人は、べつべつに研究していて、二人とも1858年にこの輪のせいしつについて発見しました。

今では、この輪のことを「メビウスの帯おび」とか「メビウスの輪わ」とか言います。

**メビウスの帯の一番のとくちょうは、1つの面しか持たないということです。**



先生からテープをいただいて、長い方向に2本の直線を引きましょう。直線を引く時には、少しこいめの線で、同じぐらい間かくを空けて、テープを3等分するように引きます。

### 【問題6】

このテープでメビウスの帯を作り、直線の1つにそってはさみで切ります。1回転してもどんどん切り進んでいきます。切り終わった時、何ができているでしょうか。

あなたはどのように思いますか。

### 予想

- ア 元の3倍の大きさの輪が1つできる ( )人  
イ 元の大きさの輪が3つできる ( )人  
ウ 元の2倍の大きさの輪が1つと、元の  
大きさの輪が1つできる ( )人

### 予想の理由

### 話し合い

みんなの考えを出し合ひましょう。

では、実さいに切ってたしかめましょう。

### 結果

メビウスの帯を半分にした時には、2倍の大きさの輪ができましたが、3等分しても3倍の大きさの輪にはなりませんでした。

また、メビウスの帯を3等分しても、3つの輪にはなりませんでした。

メビウスの帯を3等分すると、元の2倍の大きさの輪が1つと、元の大きさの輪が1つできました。

では、元のメビウスの帯は、どの部分がそれぞれの輪に分かれたのでしょうか。



先生からテープをいただいて、先ほどと同じように、テープを3等分するように線を引きます。

2本の線で区切られた真ん中を、上から下までうすく赤えん筆でぬります。また、両はしは、それぞれちがう色でぬり分けておきます。

### 【問題 7】

このテープでメビウスの帯を作り、先ほどと同じように切り進んでいきます。

さて、赤でぬった部分は、どの部分になるのでしょうか。あなたは どう 思いますか。

### 予想

- ア 元の大きさの輪の部分になる ( ) 人
- イ 元の2倍の大きさの輪の部分の一部になる ( ) 人
- ウ 両方の輪に分かれる ( ) 人

### 予想の理由

### 話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

では、実さいに切ってたしかめましょう。

### 結果

元と同じ大きさの輪が、赤くぬられていますので、元のメビウスの帯の真ん中の部分が、元と同じ大きさの輪になったことがわかります。そして、元のメビウスの帯の両はしの部分がつながって、一つの大きい輪になったこともわかります。

ところで、新しくできたこの大小2つの輪もメビウスの帯になっているのでしょうか。

元の大きさの輪は？

(メビウスの帯・メビウスの帯ではない)

元の2倍の大きさの輪は？

(メビウスの帯・メビウスの帯ではない)

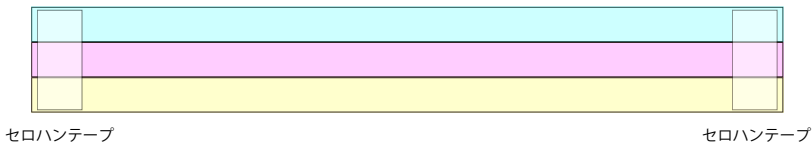
元のメビウスの帯と同じ大きさの輪の方は、メビウスの帯になっています。

そこで、新しくできたこのメビウスの帯をさらに3つに切り分けたら、どうなるでしょうか。もう、その答えはそうぞうできそうですね。き用な人は、実さいに切り取ってたしかめてみましょう。

## 【おまけの学習】

### 【問題 7】 をたしかめる他の方法<sup>ほうほう</sup>

はばが、これまで使ってきたテープの半分ぐらいで、青・赤・黄色のテープを用意します。同じ長さに切りそろえ、赤を真ん中にしてつくえの上にそろえて置き、3本のテープがばらばらにならないように、両はしにセロハンテープをはっておきます。



このじょうたいで、半回転させてはり合わせます。

すると、赤のテープは、半回転して赤どうしではり合わされるのがよく分かります。

また、青の左はしと黄色の右はしと、青の右はしと黄色の左はしとがそれぞれはり合わされて、一本につながる様子がよく分かります。

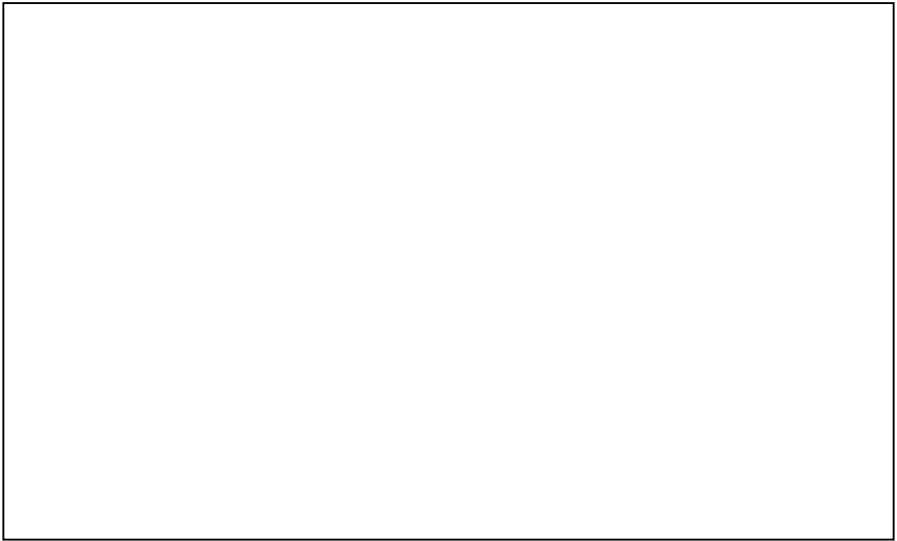
どのようにはり合わされたかをよくたしかめてから、横につなげたセロハンテープの部分を切りはなしましょう。

## メビウスの輪の書き方

新たにメビウスの輪を作って、2回スケッチしてみましょう。



1回目

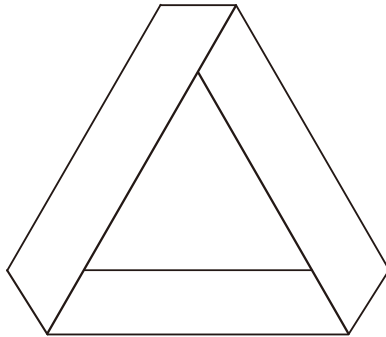


2回目

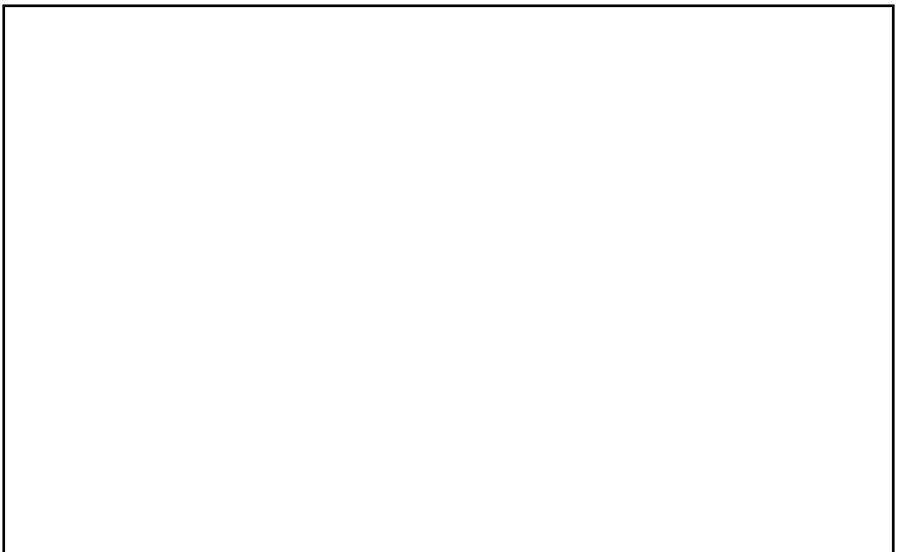
とてもむずかしいですね。

そこで、もう一つの書き方に挑戦してみましょう。

メビウスの輪を平たくして、三角形のような形にしてみます。すると、下図のようになります。



これは書きやすいので、実物を見て書いておきましょう。



## 【研究】

### 輪と おり目の数

メビウスの帯を平たくすると、おり目が3つできました。では、なぜおり目が3つなのでしょう。

そのわけを考える前に、まず、ふ通の輪のことについて考えてみましょう。

月はみちたりかけたりしますが、一年中月の表面のも様はかわりません。昔から、「ウサギがもちつきをしている」とよく言われますが、まん月の日でなくても、もちつきをしているようなも様が部分的<sup>てき</sup>に見られますから、たしかめておきましょう。

月は、地球のまわりを1ヶ月ぐらいかけてまわっているのですが、月は自分自身はくるくると回ってはいません。そこで、いつでも同じがわが地球に向いているのです。

けれども、科学者たちは、月はおよそ一月に一度自分で回っている（自<sup>じ</sup>転<sup>てん</sup>している）と言います。

それはどういうことなのでしょう。

例えば、地面にえがいた円の上をいつも中心を向いたまま歩きつづけて、元の場所にもどってくることにします。もし、自分自身が回っていないのなら、いつでも同じけ色を見ていることになります。でも、実さいやってみると、け色は次々と<sup>か</sup>変わっていき、ちょうど一ヶ所に立って、ぐるりとまわりを見回したのと同じけ色を見ることになります。円の上を歩くと、いつもまっすぐ中心を向いているので、自分自身は回っていないように思っている、元の場所にもどった時、本当は1回転、自分自身が回転しているのです。

ところで、紙テープをふ通の輪にすると、そのテープが、1回転 =  $360^\circ$  回っているという言い方ができるでしょうか。

ふ通の輪を用意して、次のようにおってみましょう。



紙テープのふ通の輪を上下くっつけて平たくなるようにおったところ

上の図を見てわかるように、紙テープのふ通の輪は、2か所でおり返すと平たくなります。それぞれは半回転 =  $180^\circ$  ですから、1回転 =  $360^\circ$  回っているという言い方ができることになります。

このふ通の輪は、テープの両はしをねじらないでつなげて作ったので、「ねじれが0の時、半回転のおり目が2つ」と言えます。

ところが、メビウスの帯は、半回転ねじってテープの両はしをつなげたのですから、ふ通の輪が持つおり目の数2に、ねじった半回転分の1をくわえることになります。(半回転ねじるごとに、その帯を平たくするためには、おり目が1ずつふえていきます。テープを輪にしないでたしかめてみましょう。)

メビウスの帯を平たくすると、おり目が3つできるのは、このようなわけです。

### 【研究問題】

1回転ねじって輪を作ります。この輪を平たくすると、いくつおり目ができますか。

答え (                    )

## マジック 2

これは、ふ通の輪を2つ重ねたものです。この外側の輪と内側の輪の間にえん筆をすべりこませます。そして、ゆっくり帯にそって動かします。すると、最初にえん筆をすべりこませたいちにもどってきて、さらに先へと進めることができます。ということは、2つの帯の間には、すき間があるということになります。はなればなれの帯が2つあるということになります。

それでは、本当に2つの帯が、はなればなれになっているか、内側の輪を取り出して、たしかめてみましょう。

……

たしかに2つの帯は、はなればなれになっていました。

では、次はこの帯です。この輪は、見ての通り、メビウスの帯を2つ重ねたものです。

### しつもん 【質問 4】

この2つ重ねたメビウスの帯の外側と内側の間に、さっきと同じようにえん筆をすべりこませて、そっと動かしてみると、今度はどうなると思いますか。

### 予想

- ア えん筆は、1周以上動かすことができる ( ) 人  
イ えん筆は、ちょうど1周のところで止まってしまう ( ) 人  
ウ えん筆は、1周すると輪の外に出てしまう ( ) 人

なぜそう思ったのか、意見を出し合っておきましょう。



では、どうなるか実さいにやってたしかめてみましょう。  
だれか一人お手伝いをしてください。

……

えん筆は、1周以上動かすことができました。ということは、この2つのメビウスの帯も、はなればなれだということになります。

でも、先生がとっておきの魔法をかけると、この2つのばらばらの帯は、たちまち1つの帯に変わります。

「エイッ！……………！」

どうです。1つの帯になりましたね。

## マジック 2 のたね明かし

もちろん、このマジックにもたねがあります。魔法で2つの輪が1つになったのではありません。もともと1つの輪だったのです。

それでは、君たちもこのマジックにちょうせんしてみましょう。

### ◆ 2つ重ねのメビウスの帯の作り方

同じ長さの色ちがいの2つのテープを重ねて、半回転ねじってはしとはしを合わせます。この時、テープのはしとはしは重ならないように、はしの線を合わせるようにしましょう。

外側の輪は外側から、内側の輪は内側からセロハンテープでとめます。これでじゅんびはOKです。

2人組になります。重ねたメビウスの輪はこわれやすいので、ひとりが、自分のメビウスの輪を両手で持ちます。もうひとは、えん筆を持ちます。そして、えん筆を輪と輪の間にすべりこませ、ゆっくり帯にそって動かします。えん筆が、すべりこませた元のいちにもどってきて、さらに先に進むことをたしかめましょう。

後は、「魔法!？」をかけて輪をほどいてみましょう。一つの輪になりましたね。

もう一度、今度は、役わりをぎやくにしてたしかめてみましょう。

### 【問題 8】

この「一つの輪」は、一つの面しか持たないメビウスの帯でしょうか。調べてみましょう。

結果 ( )

また、この「一つの輪」には、おり目はいくつありますか。平たくして数えてみましょう。

おり目の数 ( )

そのおり目の数は2でわり切れますか？

( 2でわり切れる数 ・ 2でわり切れない数 )

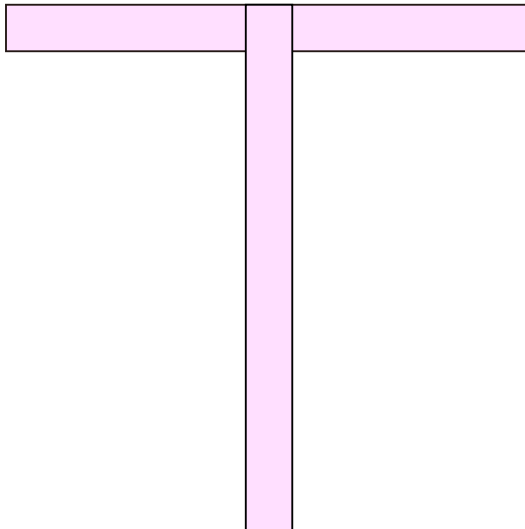
この「ひとつの輪」には、表とうらがあるので、メビウスの帯ではありません。また、おり目が6つあるので、この輪は2回転していることになります。輪の1か所を切って、かた方のテープを回転させて、本当に2回転しているか、たしかめてみましょう。

### 【問題9】

下の図のような<sup>タイ</sup>T字がたのテープを使って、メビウスの帯と同じように「1つの面しか持たない」立体を作ってみましょう。

ただし、1つだけじょうけんがあります。テープを半回転したり、回転したりしてはいけません。

※ T字がたのテープを作るには、同じ長さの2本のテープをT字がたになるようにはり合わせます。





## 【問題 10】

このメビウス・ショーツのテープの真ん中を切るとどんな形になると思いますか。まず、円の部分を切り、その次に波のようになっているところを切ります。

### 予想

- ア メビウスの輪が 2 つできる ( ) 人
- イ 大きなふ通の輪が 1 つできる ( ) 人
- ウ 大きな四角形が 1 つできる ( ) 人

### 予想の理由

### 話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

では、実さいに切ったしかめましょう。

### 結果

大きな四角形が1つできました。この四角形にはねじれはありません。

この四角形は、ほとんど正方形をしています。<sup>テー</sup>T字がたてと横のテープの長さが同じだったからです。もし、ちがう長さだったら、長方形になります。

たてと横の長さを変えて、もう一度メビウス・ショーツを作り、長方形になることを、切り開いてたしかめてみましょう。(また、波の部分を取り付ける場所を、右や左にずらせるとどうなるかも調べてみるとよいでしょう。ただし、円の帯にたいて<sup>すいちよく</sup>垂直〈直角になること〉に取り付けます。)

## くらしの中のメビウスの帯

くらしの中で使われているメビウスの帯をさがしてみましょう。

左の写真の下の方にある印は、充電式<sup>じゅうでん</sup>のかん電池には必ずついている印です。これは、メビウスの帯でしょうか。

帯を順にたどっていくと、2回転しなければ元の場所にもどれません。つまり、これはメビウスの帯です。

右下の写真は、このかん電池の写真をとったカメラのバッテリーパック（電池）の一部です。全く同じ印があります。



充電式の単三のかん電池  
(実物の 1.5 倍の大きさ)



これらは、充電式電池<sup>じゅうでん</sup>のリサイクルマークです。これらのマークのバックの色は、ふ通、充電式電池の種類によって、色分けがされています。

ニカド電池は黄緑色、ニッケル水素電池<sup>すい</sup>はだいたい色、リチウムイオン電池<sup>そ</sup>は青色、小形シール鉛蓄電池<sup>なまりちく</sup>ははい色です。(左図)

## メビウスの帯とアート

「不思議な輪 — メビウスの帯 —」の学習を終えるに当たって、最後に、メビウスの帯をテーマにしたアートをしてほしいと思います。

あなたは、どのアートが好きですか。



M.C. Escher 作  
メビウスの帯 II 1963  
(<http://www.mcescher.nl/indexuk.htm>)

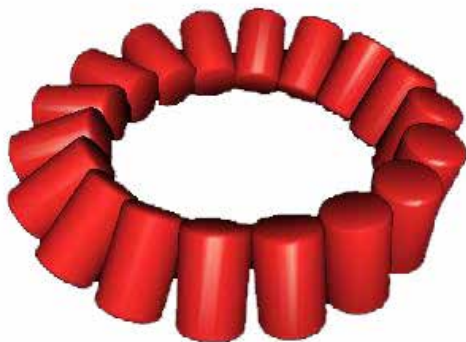


Max Bill 作  
エンドレスリボン  
granite, 1953 (orig., 1935)  
(<http://www.artbma.org/index.html>)



Teja Krasek 作  
ペンローズタイリングの  
メビウスの帯  
(<http://tejakrasek.tripod.com/>)





Drastic-Creations 社 作  
はじける缶で作った  
メビウスの帯  
(<http://www.drastic-creations.com/>)



Tom Longtin 作  
(<http://www.rovers.net/~tlongtin/>)



Bert Schoenwaelder 作  
(<http://www-vrl.umich.edu/index.html>)



研究文献

○「メビウスの帯」

(クリフォード・A・ピックオーバー 吉田三知世 訳 日経 BP 社)