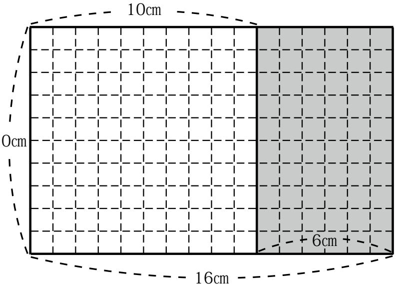
授業プラン（対象：小学校５年生以上）

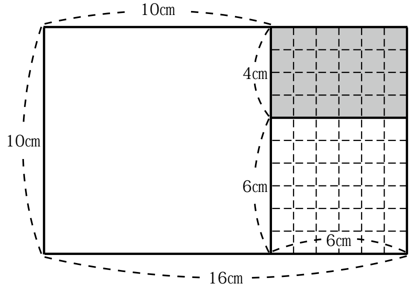
2008年7月10日　初版
2015年3月27日（2.2.0）

素数と公約数・公倍数

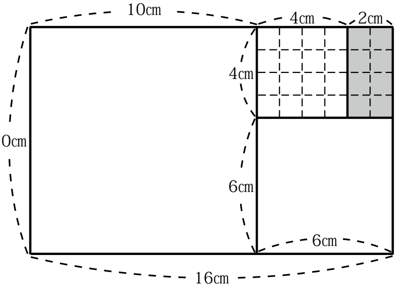
①



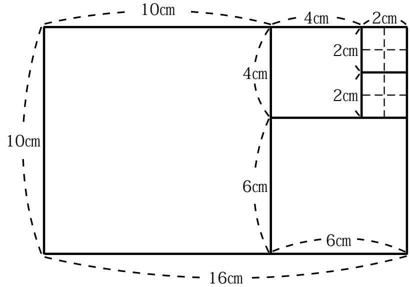
②



③



④



年　　組

名前

素数

（そすう）

　数の中には、1 とその数自身でしかわり切れないものがあります。例えば、13 は、1 と 13 でしかわり切れません。

13 ÷ 1 = 13（1 でわり切れる）
13 ÷ 2 = 6 あまり 1
13 ÷ 3 = 4 あまり 1
13 ÷ 4 = 3 あまり 1
13 ÷ 5 = 2 あまり 3
13 ÷ 6 = 2 あまり 1
13 ÷ 7 = 1 あまり 6
13 ÷ 8 = 1 あまり 5
13 ÷ 9 = 1 あまり 4
13 ÷ 10 = 1 あまり 3
13 ÷ 11 = 1 あまり 2
13 ÷ 12 = 1 あまり 1
13 ÷ 13 = 1　（その数自身でわり切れる）

【問題 1】

　1 から 13 までの整数で、1 とその数自身でしかわり切れない整数をさがして、その数を○で囲みましょう。

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

【お話 1】

1 とその数自身でしかわり切れない数は、1 から 13 までの整数だと、

1，2，3，5，7，11，13

の 7 つになります。これらの数の約数を書いてみると、

1（1）
2（1，2）
3（1，3）
5（1，5）
7（1，7）
11（1，11）
13（1，13）

となります。1 以外は約数が 2 つであることがわかります。

このように、約数で考えると、これらの数が 1 とその数自身でしかわり切れない数であることをわかりやすく表すことができます。

では、1 から 13 までのその他の整数についても、約数を調べてみましょう。

4（1，2，4）……約数は 3 つ
6（1，2，3，6）……約数は 4 つ
8（1，2，4，8）……約数は 4 つ
9（1，3，9）……約数は 3 つ
10（1，2，5，10）……約数は 4 つ
12（1，2，3，4，6，12）……約数は 6 つ

確（たし）かに、これらの数では、約数は 3 つ以上あります。

以上のことを、約数の数に注目して整理すると次のようになります。

約数1個の数	約数2個の数	約数3個以上の数
1（1）	2（1，2）	4（1，2，4）
	3（1，3）	6（1，2，3，6）
	5（1，5）	8（1，2，4，8）
	7（1，7）	9（1，3，9）
	11（1，11）	10（1，2，5，10）
	13（1，13）	12（1，2，3，4，6，12）

これらの数の中で、2，3，5，7，11，13のように、**1とそれ自身の2個しか約数を持たない数を**「**素数**」と言います。また、4，6，8，9，10，12のように、約数を3個以上持つ数を「合成数」といいます。なお、1は素数でも合成数でもありません。

素数も合成数も14以上の整数を考えれば、いくらでもあります。

例えば、51は素数でしょうか、合成数でしょうか。もし、1と51以外にも約数があれば、51は合成数ということになります。そこで1と51以外のいろいろな数で51がわりきれるかどうか調べてみましょう。

まず2でわってみましょう。ですが、計算をしなくても、51は奇数なので、2ではわり切れないことがわかります。ですから、2は約数にはなりません。

次に、3でわってみましょう。ですが、計算をしなくても、十の位の5と一の位の1をたした6は3の倍数ですから、51は3の倍数で、3でわり切れることがわかります。だから、3は51の約数ということになり、約数の数が3個以上になったので、51は合成数であることがわかります。

では、23は素数でしょうか、合成数でしょうか。

○ 23は奇数ですから、2ではわり切れません。

○ 2（十の位）＋3（一の位）＝5ですから、3でもわり切れません。

● 23は4の倍数ではないので、4でもわりきれません。

○ 23は一の位が0か5でもないので、5でもわり切れません。

● 6は2の倍数でもあり同時に3の倍数ですが、23は2でも3でもわり切れないので、6でもわり切れません。

○7でわってみるとあまりがでますから、7も約数ではありません。

●8でわってみるとあまりがでますから、8も約数ではありません。

● 2（十の位）＋3（一の位）＝5ですから、9でもわり切れません。

● 10でわってみるとあまりがでますから、10も約数ではありません。

○ 11でわってみるとあまりがでますから、11も約数ではありません。

もうこれ以上の数は、23の2倍以上になりますから、どんな数でも23をわり切ることができないことがわかります。つまり23は素数なのです。

【お話 2】

やっと 23 が素数であることがわかりました。ところで、ある数が素数かどうかを調べるのにもっとかん単な方法はないものでしょうか。

実は、23 が素数であるかどうかを調べた時の●のところは省(はぶ)いて考えてよいのです。

それはなぜでしょうか。

例えば 4 について考えます。4 でわりきれる数として 24 を考えると、

$$24 \div 4 = 6$$

ですが、これは、

$$24 \div 2 \div 2 = 6$$

と同じことですから、24 が 4 でわり切れる時には、必ず 2 でもわり切れるのです。

また、6 について考えてみると、6 でわりきれる数として 18 では、

$$18 \div 6 = 3$$

ですが、これは、

$$18 \div 2 \div 3 = 3$$

と同じことになり、18 が 6 でわり切れる時には、必ず 2 でも 3 でもわり切れるのです。

ですから、逆(ぎゃく)に言えば、2 でわり切れないことがわかれば、4 でも 6 でもわり切れないことがわかりますし、3 でわり切れないことがわかれば、6 でもわり切れないことがわかるのです。

同じように考えて、

○８でわり切れるかどうかは、÷２÷２÷２と同じことですから、２でわり切れなければ８でもわり切れないのです。

○９でわり切れるかどうかは、÷３÷３と同じことですから、３でわり切れなければ９でもわり切れないのです。

○10でわり切れるかどうかは、÷２÷５と同じことですから、２か５でわり切れなければ10でもわり切れないのです。

つまり、4，6，8，9，10などの合成数でわってみて、わり切れるかどうかを確かめる必要はないのです。ですから、ある数が素数か合成数かを調べるには、2，3，5，7，11などの素数だけでわってみて、わり切れればその時点で合成数だとわかるのです。

【問題2】

17は素数でしょうか合成数でしょうか。素数だけ（11は17の半分より大きいので、7までの4つの素数）でわってみて確かめましょう。

計算するわく

答え：17は（　　　　　）です。

【作業 1】

もっとたくさんの素数をさがしてみましょう。

何かうまい方法があるといいのですが、現在の数学者でもこれというううまい方法は発見できていません。

今あるのは、約 2200 年くらい前、エジプトで活躍したギリシャ人のエラトステネスという人が考え出した方法だけです。それを「エラトステネスのふるい」と言います。その方法で、とりあえず 1 から 100 までの数の中から素数をさがしてみましょう。

まず、先生から 1 から 100 までの数を書いた用紙をもらって名前を書きましょう。（用紙は 72 ページにあります）

① 1 は素数でないので、×をつけます。

② 2 は素数だから○をつけて残します。2 の倍数はすべて 2 を約数に持つ（2 でわれる）ので、2 以外の 2 の倍数を定規で線を引いて消します。

③同じように、3 に○をつけて、3 以外の 3 の倍数を消します。

● 4 と 4 の倍数は、2 の時に消されています。

④ 5 に○をつけて、5 以外の 5 の倍数を消します。

● 6 と 6 の倍数は、2 の時に消されています。

⑤ 7 に○をつけて、7 以外の 7 の倍数を消します。ただし、7 の 7 倍、11 倍、13 倍以外の倍数は、すでに消されています。

● 8 と 8 の倍数は、2 の時に消されています。

● 9 と 9 の倍数は、3 の時に消されています。

● 10 と 10 の倍数は、2 の時に消されています。

【お話 3】

ところで、「10」より大きい数の倍数は考える必要はありません。「10」より大きい数では、かけて 100 までにおさまるためには 10 倍未満になりますが、2 倍から最大 9 倍するということは、2 から最大 9 までの倍数だということです。

例えば、「11」の倍数を考えるとすると、11 の 2 倍、3 倍、4 倍、……、9 倍（＝ 99）までですが、それぞれ 2 の 11 倍、3 の 11 倍、4 の 11 倍、……、9 の 11 倍と同じことですから、すでに調べずみということになります。

そこで、1 から 100 までの全ての素数を調べるには、前ページの●ははぶいて、①から⑤までの 5 つの作業だけでよいことがわかります。

【問題 3】

100 までの素数を全て書き出して、小さい素数からできるだけ覚えましょう。また、全部で何個ありましたか。

答え：100 までの素数（素数と素数の間は「,（コンマ）」で区切ります）

答え：100 までの素数の数　　　（　　　）個

素因数分解

【質問 1】

24 は合成数ですが、素数だけをかけて 24 にできるでしょうか。あなたはどう思いますか。

予想

ア　素数だけをかけて 24 にできる　　　　　　　（　　）人

イ　素数だけをかけたのでは 24 にはならない（　　）人

そう考えたわけ（式など）も書きましょう。

話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

【お話 4】

24 をかけ算の式にすると、

① 1 × 24 ＝ 24（またはその逆の 24 × 1）

② 2 × 12 ＝ 24（またはその逆の 12 × 2）

③ 3 × 8 ＝ 24（またはその逆の 8 × 3）

④ 4 × 6 ＝ 24（またはその逆の 6 × 4）

になります。

①の場合、1 も 24 も素数ではありません。

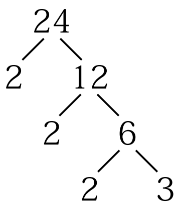
②の場合は、2 は素数ですが、12 は合成数です。

③は、3 は素数ですが、8 は合成数です。

④は、4 も 6 も素数ではありません。

では、素数だけをかけて 24 にすることはできないのでしょうか。

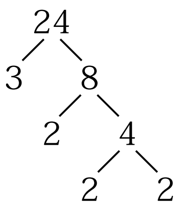
②の場合は、12 をさらに分解（ぶんかい）してみましょう。すると 12 ＝ 2 × 6 となって、素数の 2 が出てきました。では、6 をさらに分解してみましょう。すると 6 ＝ 2 × 3 となって、素数の 2 と 3 が出てきます。結局以上をまとめると、



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

と表すことができます。24 は、全て素数だけのかけ算として表すことができました。

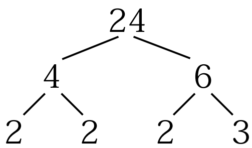
③の場合はどうでしょう。ここでは合成数の 8 を分解することができます。



8 ＝ 2 × 2 × 2 ですから、

$$24 = 3 \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

となり、やはり24を素数だけのかけ算として表すことができます。



④の場合は、4も6も合成数ですから、それぞれを分解します。

$$24 = (2 \times 2) \times (2 \times 3)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

やはりこの場合も、24を素数だけのかけ算として表すことができます。

①の 1×24 は特別です。この場合は、元の24のままをまた分解しなければなりませんし、$24 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ と表しても、1をわざわざかける必要がありません。素数だけで表そうとする時には、1をかけることは意味がないので使わないことにします。

②も③も④も、2と3の出てくる順番にちがいがありますが、どれも2が3つと3が1つです。また、2も3も素数ですから、もうこれ以上に細かい数に分けることはできません。

このように、合成数を素数の積に分けた時、その素数を**素因数**と言い、合成数を素因数の積に分けることを**素因数分解**と言います。

24の素因数は2が3つと3です。

【質問 2】

ところで 1 以外のどんな大きな数も、必ず素因数分解ができるのでしょうか。あなたはどう思いますか。

予想

ア　どんな大きな数も素因数分解ができる　　（　　）人

イ　数によっては素因数分解ができない　　（　　）人

そう考えたわけも書きましょう。

話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

【お話 5】

実はこれは大変むずかしい問題です。ずいぶん大きな数まで調べようとすると、とても大変だからです。ここでは、例えば、20584410 という数が素因数分解できるかどうか確かめてみましょう。

この数をよく見ると、2 の倍数でも 3 の倍数でも 5 の倍数でもあることがわかりますから、

$$20584410 = 2 \times 3 \times 5 \times 686147$$

になります。ここで 686147 が再び 2，3，5 の倍数かどうかを確かめます。2，3，5 の倍数ではないので、次に小さい素数である 7 で、試しに 686147 をわってみましょう。

$$20584410 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 98021$$

すると、7 でわり切れました。そこで、もう一度残りの 98021 が 7 の倍数かどうかを確かめます。すると、また 7 でわり切れますから、98021 を 7 と 14003 に分解します。

$$20584410 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 14003$$

そして、さらにもう一度、14003 が 7 の倍数かどうかをたしかめます。今度は7ではわり切れませんから、7の次の素数である11でわってみます。

$$20584410 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 1273$$

すると、11 でわり切れました。そこで、もう一度 1273 が 11 の倍数かどうかを確かめます。今度は 11 ではわり切れないので、11 の次の素数である 13 で残りの 1273 をわってみます。でも、13 ではわり切れないので、次に 13 の次の素数である 17 でわってみます。17 でもわり切れないので、次に 17 の次の素数である 19 でわってみます。

$$20584410 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 19 \times 67$$

やっとわり切れました。1273 は 19 の倍数だったのです。残りは 67 ですが、67 は 100 までの整数の中にあった素数です。ですから、これで 20584410 を素因数分解することができたことになります。

【質問2】の答えですが、実は1以外のどんな数でも素因数分解ができるのです。逆に言えば、どんな数も素数の積で表せる合成数か素数そのものなのです。

ですから、次の問題のそれぞれの数も必ず素因数分解ができます。素数の積になるまで、根気強くわってみましょう。

【問題4】

次の数を素因数に分解しなさい。ふ通、素因数は小さい数から順に書きます。

（例）36 = 6 × 6 = 2 × 3 × 2 × 3 = 2 × 2 × 3 × 3

（小さい順にならべかえる）

36の素因数は（2と3が2つずつ）です。

42 =

42の素因数は（　　　　　　　　　　　）です。

55 =

55の素因数は（　　　　　　　　　　　）です。

72 =

72の素因数は（　　　　　　　　　　　）です。

64 =

64の素因数は（　　　　　　　　　　　）です。

91 =

91の素因数は（　　　　　　　　　　　）です。

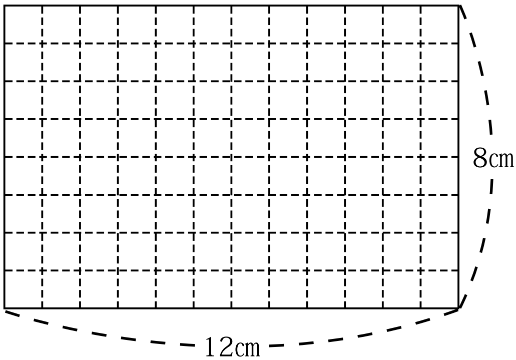
※91のヒント

素数の小さい方から順に、わり切れるかやってみます。

2 → 3 → 5 → 7 → 11……の順です。でも、見ただけで、91は2の倍数でも3の倍数でも5の倍数でもないことがわかりますね。

公約数と最大公約数

1㎝方眼でできた、たて8㎝、横12㎝の長方形の紙があります。この紙を方眼の線にそって切り、同じ大きさの正方形に分けます。この時、あまりの紙が出ないようにします。どのように切り分けることができるでしょうか。



もっともかん単なのは、1辺が1㎝の正方形で切り分ける方法です。図を見ればすぐにわかることですが、計算で説明すると、たての8㎝を8でわると1㎝、横の12㎝を12でわると1㎝となって、たても横もわり切れて同じ1㎝になります。だから、正方形ができるのです。

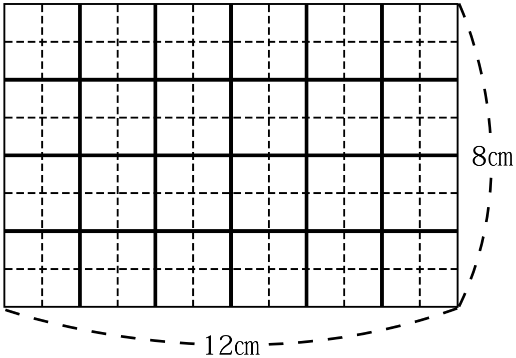
【問題5】

他にも正方形ができるでしょうか。全ての場合について考えましょう。今度もあまりの紙が出ないように切り分けます。先生から、たて8㎝、横12㎝の長方形の紙をいただいて、実際に切り分けてみましょう。紙は、一度に1まいずつ、必要なまい数だけいただきましょう。（用紙は73ページにあります）

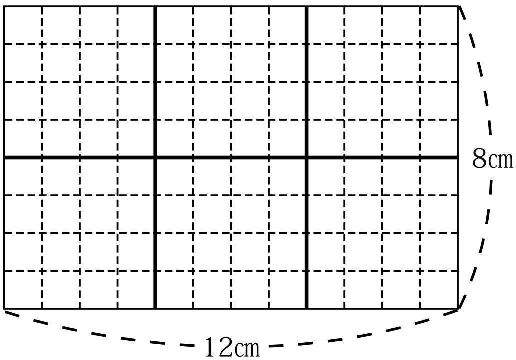
できた正方形の1辺の長さを書きましょう。

【お話 6】

たて 8㎝、横 12㎝の長方形から作れる正方形は、１辺が１㎝の他は、2㎝と 4㎝であることがわかりました。



2㎝の場合は、たて８㎝を４でわって 2㎝、横 12㎝を６でわって 2㎝となり、どちらもわり切れて 2㎝になります。



4㎝の場合は、たて８㎝を２でわって 4㎝、横 12㎝を３でわって 4㎝となり、どちらもわり切れて 4㎝になります。

ところが、例えば横 12㎝を４でわるとわり切れて 3㎝になりますが、たて 8㎝からはどんな整数でわっても３㎝にはなりません。

ところで、この問題は、たてや横の長さをわり切る数とその商を考えているのですから、たてや横の長さのそれぞれの約数を考えていることになります。

そこで、8 と 12 のそれぞれの約数を書き出してみましょう。

8 の約数：1，2，　　4，　　8

12 の約数：1，2，3，4，　6，　　12

8 の約数の

1 とは、1 でわればわり切れて 1 区画が 8cm に

2 とは、2 でわればわり切れて 1 区画が 4cm に

4 とは、4 でわればわり切れて 1 区画が 2cm に

8 とは、8 でわればわり切れて 1 区画が 1cm に

なるという意味です。

12 の約数の

1 とは、1 でわればわり切れて 1 区画が 12cm に

2 とは、2 でわればわり切れて 1 区画が 6cm に

3 とは、3 でわればわり切れて 1 区画が 4cm に

4 とは、4 でわればわり切れて 1 区画が 3cm に

6 とは、6 でわればわり切れて 1 区画が 2cm に

12 とは、12 でわればわり切れて 1 区画が 1cm に

なるという意味です。

すると、1cm と 2cm と 4cm が、どちらからも余ることなく分けられる長さであることがわかります。この時、それぞれの長さを 1 辺とする正方形ができることになります。

この 1cm と 2cm と 4cm は商に当たる数ですが、わり切れた商は必ず約数なのですから、わりきる数も商もどちらも区別することなく、約数と考えればいいでしょう。

以上のように考えて、もう一度 8 と 12 の約数を見ると、確かに 1 と 2 と 4 が、8 と 12 のどちらにもふくまれていることがわかります。

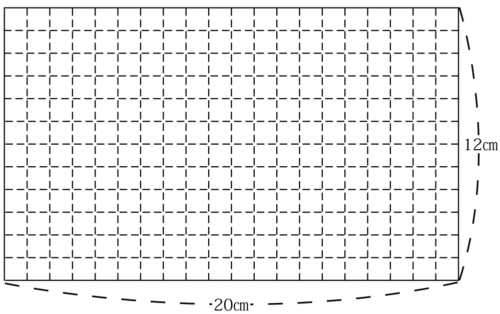
この 1，2，4 のように、2 つの数（またはそれ以上の数）

に共通な約数を**公約数**（こうやくすう）といいます。また、公約数の中で一番大きいものを**最大公約数**といいます。8と12の最大公約数は4です。

公約数は、共通な約数ですから、元の数の小さい方の数（または最も小さい数）よりも大きくなることはありません。

【問題6】

1㎝方眼でできた、たて12㎝、横20㎝の長方形の紙があります。この紙を方眼の線にそって切り、同じ大きさの正方形に分けます。この時、あまりの紙が出ないようにします。1辺の長さが何㎝の正方形に切ることができますか。公約数を使って、全ての場合について答えなさい。



〈公約数を使った考え〉

答え：1辺の長さが（　　　　　　　　　　　　　　　）㎝

の正方形に分けることができる。

【問題 7】

次の数の公約数と最大公約数を書きましょう。

①6 と 12

6 の約数：

12 の約数：

6 と 12 の公約数：

6 と 12 の最大公約数：

②8 と 20

8 の約数：

20 の約数：

8 と 20 の公約数：

8 と 20 の最大公約数：

③9 と 12

9 の約数：

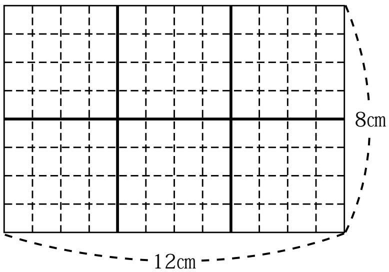
12 の約数：

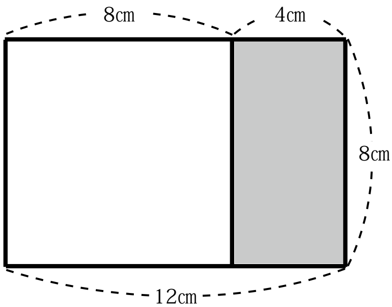
9 と 12 の公約数：

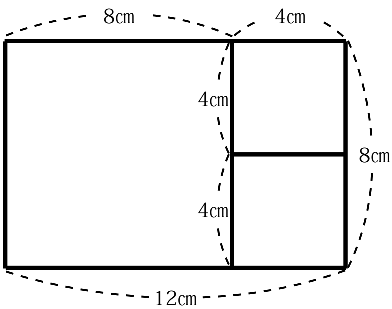
9 と 12 の最大公約数：

最大公約数の求め方

【お話 7】下の図は、8㎝と 12㎝の最大公約数 4㎝を 1 辺の長さとする正方形の図です。この図の中に正方形が 6 つあるのですが、今ここで、図の左にある 4 つの正方形を一つにまとめてみましょう。すると、1 辺 8㎝の正方形とたて 8㎝、横 4㎝の長方形に分かれます。





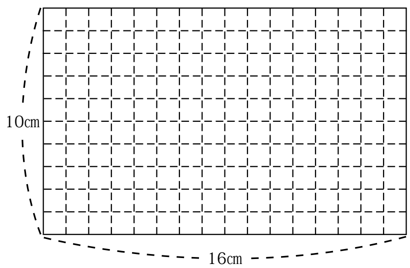


この作業は、たて 8㎝、横 12㎝の長方形の紙から、紙があまってもよいことにして、1 辺が 8㎝の最大の正方形を取り出したことになります。そこで、今度は同じ考えで、あまっているたて 8㎝、横 4㎝の長方形の紙から、最大の正方形をとり出すことにします。

すると、あまりの長方形からは、1 辺が 4㎝の正方形が 2 つ取れ、紙があまりません。これで、作業が完りょうします。

ところで、最後に取り出した 1 辺が 4㎝の正方形のその 4㎝が、8 と 12 の最大公約数と一ちしています。これは、この場合だけのぐう然なのでしょうか。

そこで、今度はたて 10㎝、横 16㎝の長方形について、同じことがいえるか調べてみましょう。（用紙は 74 ページにあります）

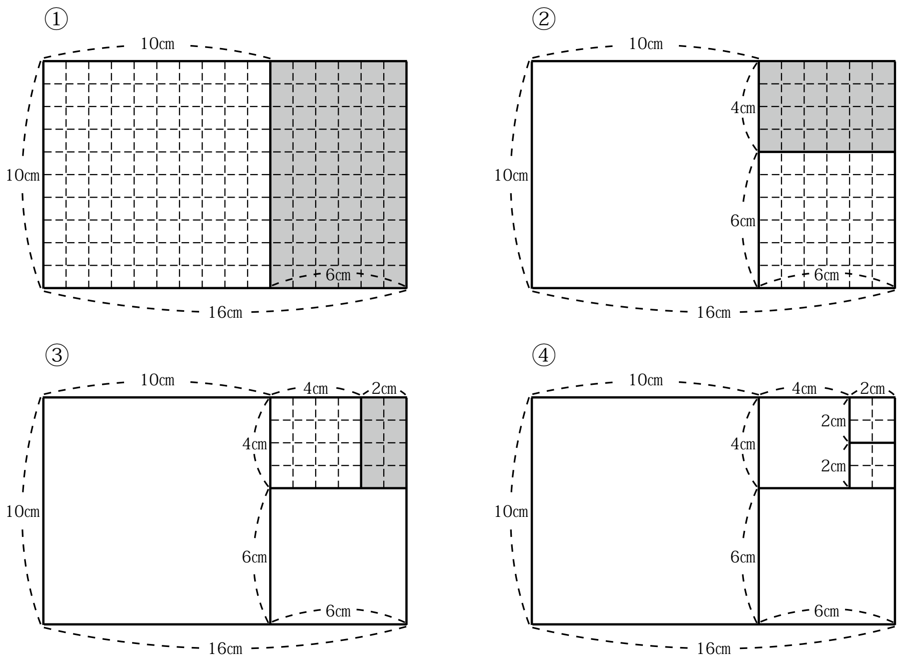


①たて 10㎝、横 16㎝の長方形から、最大の 1 辺が 10㎝の正方形を取り出します。

② ①で残ったたて 10㎝、横 6㎝の長方形から、最大の 1 辺が 6㎝の正方形を取り出します。

③ ②で残ったたて 4㎝、横 6㎝の長方形から、最大の 1 辺が 4㎝の正方形を取り出します。

④ ③で残ったたて 4㎝、横 2㎝の長方形から、1 辺が 2㎝の正方形を 2 つ取り出します。紙が残りませんから、これで作業は終わりです。



このことから、10 と 16 の最大公約数は、最後に取り出した 1 辺が 2㎝の正方形のその「2」ということになるのですが、この答えは正しいのでしょうか。

10 の約数：①，②，　5，　10

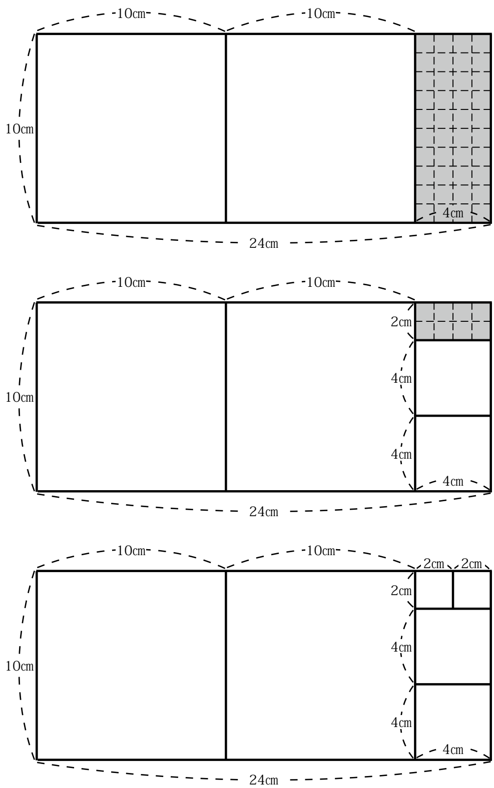
16 の約数：①，②，4，　8，　16

確かに、2 が最大公約数です。

そこで、念（ねん）おしのために、さらにもう一度、同じ考えを使って、最大公約数が求められるか調べてみましょう。

今度は、たてが 10㎝、横が 24㎝の長方形にします。

初めに 1 辺が 10㎝の正方形を取りますが、この場合は 2 つ取れます。



次に残りの部分から 1 辺が 4㎝の正方形をとりますが、この場合も 2 つ取れます。

最後に、残りの部分から 1 辺が 2㎝の正方形をとりますが、この場合も 2 つ取れ、紙があまりませんから、作業はここまでで終わりです。

このことから、10 と 24 の最大公約数は、最後に取り出した 1 辺が 2㎝の正方形の「2」ということになります。実際、10 と 24 のそれぞれの約数を調べてみると、確かに 2 は 10 と 24 の最大公約数であることがわかります。

大変不思議なことですが、長方形を最大の正方形で区切っていく作業をくり返すことで、たてと横の２つの数の最大公約数が求まりました。でも、なぜこんな方法で最大公約数が求まるのでしょうか。

【質問 3】

あなたはそのわけをだれかが説明できると思いますか。

予想

ア　だれも説明できないことだ　（　　）人

イ　やはり説明できることだ　（　　）人

ウ　その他　（　　）人

そう考えたわけも書きましょう。

話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

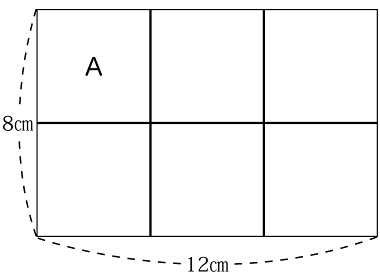
【お話 8】

今からおよそ 2300 年前に、 エジプトで活躍したギリシャ人のユークリッドという人が、2 つの数の最大公約数を求めるこの方法を本にまとめたので、この方法を「ユークリッドの互除法」といいます。すでに、2300 年以上も前に、この方法で最大公約数が求まることがわかっていて、そのわけも説明できていたのです。

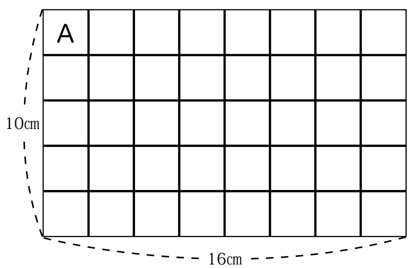
それではそのわけを説明しましょう。

数値が整数のどんな長方形も、たて・横の長さの最大公約数（最小で 1）でしきれば、「最大公約数を 1 辺とする正方形」（この正方形を「A」とします）でしきつめられます。

8cm と 12cm の長方形の場合



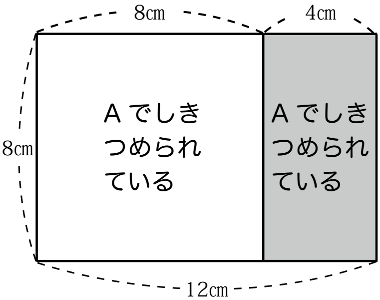
10cm と 16cm の長方形の場合

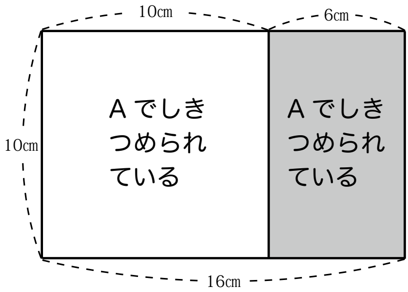


この長方形は、短い方の辺を 1 辺とする最大の正方形と残りの長方形に分けることができ、それぞれが A でしきつめられています。

※長方形の短い辺が A でしきつめられているということは、長方形の長い辺も短い辺の長さまで、A ですき間なくしきつめら

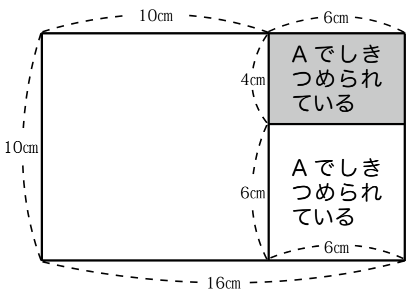
れているということです。もともと長方形全体が A でしきつめられているのですから、最大の正方形が A でしきつめられていれば、残りの長方形も A でしきつめられていることになります。



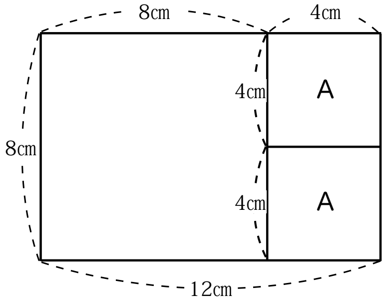


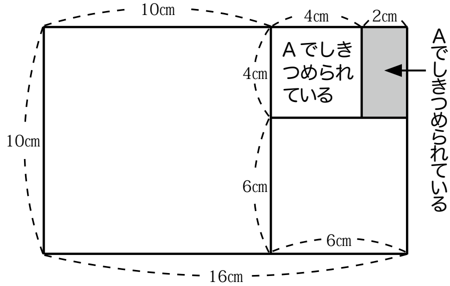
そこで、新たにできる長方形から、A をさがすことができます。

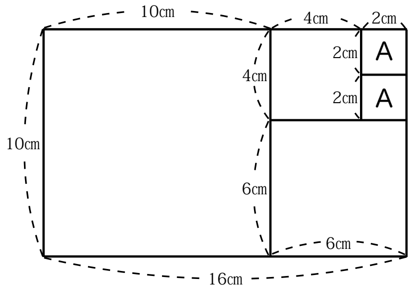
ところで、この新たにできる長方形も、最大の正方形と残りの長方形に分けることができ、それぞれが A でしきつめられています。（さきほどと同じ理由です。）



このように、新たにできる長方形をいつも最大の正方形と長方形に分けていくのですが、もしも新たにできた長方形が、最大の正方形でちょうどしきつめられれば、その最大の正方形そのものが、A ということになります。







こうして、元の長方形の２辺の長さの最大公約数が求まります。

【お話 9】

お話 8 では、タイル図を使って説明しましたが、今度は式を使って説明します。お話 8 のタイル図を見ながら、説明を読みましょう。

◎ 8cm と 12cm の長方形の場合

元の長方形からできる新たな長方形の 1 辺の長さは、

$$12 - 8 = 4$$

で求まりますから、この長方形の辺の長さは 4cm と 8cm になります。

この長方形の中に入る最大の正方形は 1 辺が 4cm ですから、

$$8 - 4 = 4$$

となり、ちょうど最大の正方形が 2 つ取れることがわかります。

このことから、8cm と 12cm の最大公約数は 4cm であることがわかります。

◎ 10cm と 16cm の長方形の場合

元の長方形からできる新たな長方形の 1 辺の長さは、

$$16 - 10 = 6$$

で求まりますから、この長方形の辺の長さは 6cm と 10cm になります。

この長方形からできる新たな長方形の 1 辺の長さは、

$$10 - 6 = 4$$

で求まりますから、この長方形の辺の長さは 4cm と 6cm にな

ります。

この長方形からできる新たな長方形の 1 辺の長さは

$$6 - 4 = 2$$

で求まりますから、この長方形の辺の長さは 2cm と 4cm になります。

この長方形の中に入る最大の正方形は 1 辺が 2cm ですから、

$$4 - 2 = 2$$

となり、ちょうど最大の正方形が２つ取れることがわかります。

このことから、10cm と 16cm の最大公約数は 2cm であることがわかります。

それでは、式だけを取り出してみましょう。

○ 8 と 12 の最大公約数を求める場合

$$12 - 8 = 4$$
$$8 - 4 = 4$$

○ 10 と 16 の最大公約数を求める場合

$$16 - 10 = 6$$
$$10 - 6 = 4$$
$$6 - 4 = 2$$
$$4 - 2 = 2$$

いずれも、引く数と差が同じになった時、その差（または引く数）が最大公約数になることがわかります。

式のきまりを見つけておきましょう。

【問題 8】

【お話 9】の方法で最大公約数を求めましょう。

① 15 と 9

答え：最大公約数は＿＿＿＿

② 20 と 12

答え：最大公約数は＿＿＿＿

③ 25 と 15

答え：最大公約数は＿＿＿＿

【お話 10】

ところで、これまでの説明は、引き算で説明してきました。ところが、この最大公約数を求める方法のことを「互除法（ごじょほう）」というのでしたね。互除とはお互（たが）いの数でわることです。

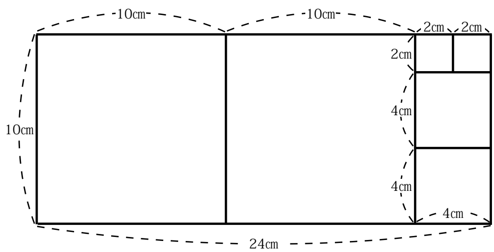
そこで、互除法の名前に合うように、わり算で説明し直すことにします。10 と 24 の最大公約数を求める問題です。

下の 2 つの式を見比べてください。左側が引き算で最大公約数を求めた式で、右側がわり算で最大公約数を求めた式です。

	引き算で	わり算で
1 行目	24 − 10 × 2※ ＝ 4	24 ÷ 10 ＝ 2 あまり 4
2 行目	10 − 4 × 2※ ＝ 2	10 ÷ 4 ＝ 2 あまり 2
3 行目	4 − 2 ＝ 2	4 ÷ 2 ＝ 2（わり切れました）
答え	2 が最大公約数	2 が最大公約数

※引き算のらんの 1 行目の 10 × 2 とは、24㎝の中に 1 辺 10㎝の正方形が 2 つ取れるという意味です。また、同じく引き算のらんの 2 行目の 4 × 2 とは、10㎝の中に 1 辺 4㎝の正方形が 2 つ取れるという意味です。（下図）

引き算では、最大の正方形がいくつ取れるかを考えて、前もって引く数を大きくしなければなりませんが（1 行目の 10 × 2 や 2 行目の 4 × 2 のこと）、わり算ではただわるだけでよいことがわかります。なれればわり算を使う方が、かん単に最大公約数が求まります。



【問題 9】

ユークリッドの互除法を用いて、わり算で最大公約数を求めましょう。

〈例〉 60 と 84

84 ÷ 60 ＝ 1 あまり 24

60 ÷ 24 ＝ 2 あまり **12**

24 ÷ **12** ＝ 2（わり切れました）

答え：最大公約数は　12

① 8 と 12

答え：最大公約数は

② 10 と 16

答え：最大公約数は

③ 10 と 24

答え：最大公約数は

④ 12 と 30

答え：最大公約数は

【お話 11】

【問題 9】の〈例〉の式だけをもう一度よく見てみましょう。

$$84 \div 60$$

$$60 \div 24$$

$$24 \div 12$$

今、これらの式のわられる数とわる数の最大公約数をそれぞれ求めてみましょう。

（60，84）⇨ 12

（60，24）⇨ 12

（24，12）⇨ 12

すると当然のことですが、どれも最大公約数は 12 になります。ユークリッドの互除法は､同じ最大公約数を求めるさいに､より小さな数に置きかえて計算する方法だとも言えます。

それでは、最後に互除法の筆算をしょうかいします。

■ 60 と 84 の最大公約数は？

①

$$\begin{array}{r} 1 \\ 60\overline{)84} \\ 60 \\ \hline 24 \end{array}$$

⇩

①大きい数を小さい数でわります。

②

$$\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 24\overline{)60} & \overline{)84} \\ 48 & 60 \\ \hline 12 & 24 \end{array}$$

⇩

②あまりの 24 で 60 をわります。
筆算の式は左へのばします。

③

$$\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 1 \\ 12\overline{)24} & \overline{)60} & \overline{)84} \\ 24 & 48 & 60 \\ \hline 0 & 12 & 24 \end{array}$$

③あまりの 12 で 24 をわります。
筆算の式はさらに左へのばします。わり切れれば、あまりだった 12 が最大公約数です。

【問題 10】

ユークリッドの互除法を用いて、筆算で最大公約数を求めましょう。

①8 と 12

$$8\overline{)12}$$

答え：最大公約数は＿＿＿

②10 と 16

$$10\overline{)16}$$

答え：最大公約数は＿＿＿

③10 と 24

$$10\overline{)24}$$

答え：最大公約数は＿＿＿

④12 と 20

$$12\overline{)20}$$

答え：最大公約数は＿＿＿

【お話 12】

素因数分解を使った最大公約数の求め方

24 を素因数分解してみましょう。

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

さて、この素因数分解という方法を使って、24 の全ての約数を求めることができるでしょうか。

約数は、必ずわる数と商とで組になっていて、その組になっている約数の積は元の数になります。

今ここで、2 と 2 × 2 × 3 を分けて組にしてみると、

$$24 = 2 \times (2 \times 2 \times 3) = 2 \times 12$$

となり、2 と 12 は 24 の約数を表します。

同じく、2 × 2 と 2 × 3 を分けて組にしてみると、

$$24 = (2 \times 2) \times (2 \times 3) = 4 \times 6$$

となり、4 と 6 は 24 の約数を表します。

同じく、2 × 2 × 2 と 3 を分けて組にしてみると、

$$24 = (2 \times 2 \times 2) \times 3 = 8 \times 3$$

となり、8 と 3 は 24 の約数を表します。

後 1 組あるのですが、それは、1 は素数ではないのですが、

$$24 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

と考えて、1 と 2 × 2 × 2 × 3 を分けて組にしてみると、

$$24 = 1 \times (2 \times 2 \times 2 \times 3) = 1 \times 24$$

となり、1 と 24 は 24 の約数を表します。

これで 24 の約数の全てが出そろったことになります。

このように、素因数分解という方法を使って素数に分解された素因数を組み合わせば、全ての約数を求めることができるのです。

そこで、２つ以上の数をそれぞれ素因数分解して共通な素因数を見つけ出し、それらをさまざまに組み合わせれば、全ての公約数を見つけることができるはずです。また、最も大きな数になるように共通な素因数を全てかけ合わせれば、最大公約数が求まるはずです。

12 と 18 で考えてみましょう。

まずそれぞれの数を素因数分解します。**同じ素因数をたてにそろえて書くとわかりやすくなります**。

$$
\begin{array}{rcllll}
12 & = & 2 & \times 2 & \times 3 & \\
18 & = & 2 & & \times 3 & \times 3
\end{array}
$$

すると、共通な素因数は、２が１つと３が１つであることがわかります。ですから、12 と 18 の公約数は、２と３と２×３＝6 とそれに１の４つということになります。このことを、

$$
\begin{array}{rcllll}
12 & = & 2 & \times 2 & \times 3 & \\
\hline
18 & = & 2 & & \times 3 & \times 3 \\
\hline
6 & = & 2 & & \times 3 &
\end{array}
$$

と書くことにしましょう。そして、２×３がもっとも大きな公約数なのですから、6 が最大公約数です。

それでは、今度は 18 と 24 の公約数と最大公約数を求めてみましょう。

$$\begin{array}{rclllll}
18 & = & 2 & & & \times 3 & \times 3 \\
24 & = & 2 & \times 2 & \times 2 & \times 3 & \\
\hline
6 & = & 2 & & & \times 3 &
\end{array}$$

となりますから、公約数は、1 と 2 と 3 と 6 で、最大公約数は 6 です。

次に、24 と 36 と 60 の 3 つの数の公約数と最大公約数を求めてみましょう。

$$\begin{array}{rcllllll}
24 & = & 2 & \times 2 & \times 2 & \times 3 & & \\
36 & = & 2 & \times 2 & & \times 3 & \times 3 & \\
60 & = & 2 & \times 2 & & \times 3 & & \times 5 \\
\hline
12 & = & 2 & \times 2 & & \times 3 & &
\end{array}$$

3 つの数に共通な素因数は 2 が 2 つと 3 が 1 つですから、公約数は、1 と、2 と、3 と、2 × 2 の 4 と、2 × 3 の 6 と、全部の共通な素因数をかけた 12 で、最大公約数は 12 です。

【問題 11】

素因数分解を使って、最大公約数を求めましょう。

① 24 と 36

24 ＝

36 ＝

＝

答え：最大公約数は

② 45 と 63

45 ＝

63 ＝

＝

答え：最大公約数は

③ 48 と 60 と 72

48 ＝

60 ＝

72 ＝

＝

答え：最大公約数は

④ 28 と 60 と 84

28 ＝

60 ＝

84 ＝

＝

答え：最大公約数は

最大公約数を求めたい時、数を見ただけで答えがわかる場合があります。

例えば、12 と 60 ですと、小さい方の数の 12 です。実際に素因数分解を用いて最大公約数を求めてみると、

$$
\begin{aligned}
12 &= 2 \times 2 \times 3 \\
\underline{60} &\underline{= 2 \times 2 \times 3 \times 5} \\
12 &= 2 \times 2 \times 3
\end{aligned}
$$

となります。60 は 12 と比べて「× 5」の部分だけ素因数が多くあります。これは、60 は 12 の 5 倍ということですね。ですから、60 は 12 で割り切れるわけです。

このように、小さい方の数で大きい方の数がわり切れれば、小さい方の数が最大公約数です。また、3 つ以上の数の場合には、一番小さい数で他の数がわり切れれば、その一番小さい数が最大公約数です。

【問題 12】

次の数の最大公約数を求めましょう。

① 25 と 100

（　　）は（　　）でわり切れるので、最大公約数は（　　）です。

② 18 と 36

（　　）は（　　）でわり切れるので、最大公約数は（　　）です。

③ 14 と 42 と 70

（　　）と（　　）は（　　）でわり切れるので、

最大公約数は（　　）です。

最大公約数が 1 になる場合があります。この時、公約数も 1 だけです。

$$
\begin{array}{l}
15 = \qquad\qquad 3 \times 5 \\
\underline{28 = 2 \times 2 \qquad\qquad \times 7} \\
\ \ 1 = 1
\end{array}
$$

上の例では、公約数がないように見えますが、1 は全ての数の約数ですから、1 は公約数です。その 1 しかないのですから、最大公約数は 1 です。

このように、1 以外に公約数を持たない 2 つの数を、「たがいに素(そ)である」といいます。

【問題 13】

素因数分解を使って、最大公約数を求めましょう。

① 12 と 35

$$
\begin{array}{l}
12 = \\
\underline{35 = \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\quad\ =
\end{array}
$$

答え：<u>最大公約数は　　　</u>

② 27 と 28 と 30

$$
\begin{array}{l}
27 = \\
28 = \\
\underline{30 = \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\quad\ =
\end{array}
$$

答え：<u>最大公約数は　　　</u>

【質問 4】

3つの数の最大公約数を求める時に、素因数分解を用いる方法では、3つの数を同時に比べて答えを求めていました。それでは、3つの数のうち、初めに2つの数の最大公約数を求めて、その最大公約数と残りの数で最大公約数を求めると、答えがちがってくるのでしょうか。あなたはどう思いますか。

予想

ア　答えは同じになる　（　　）人

イ　分けて求める方が、答えは大きくなる　（　　）人

ウ　分けて求める方が、答えは小さくなる　（　　）人

エ　計算の順番によって、答えが大きくなったり小さくなったりする　（　　）人

そう考えたわけも書きましょう。

話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

【お話 13】

それでは実際に計算をして比べてみましょう。

○ 3 つの数から同時に求める時

$$\begin{array}{rclccc}
28 & = & 2 \times 2 & & & \times 7 \\
60 & = & 2 \times 2 & \times 3 & \times 5 & \\
84 & = & 2 \times 2 & \times 3 & & \times 7 \\ \hline
\mathbf{4} & = & \mathbf{2} \times \mathbf{2} & & &
\end{array}$$

① 28 と 60 を先に求める時

$$\begin{array}{rclccc}
28 & = & 2 \times 2 & & & \times 7 \\
60 & = & 2 \times 2 & \times 3 & \times 5 & \\ \hline
4 & = & 2 \times 2 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rclccc}
4 & = & 2 \times 2 & & & \\
84 & = & 2 \times 2 & \times 3 & & \times 7 \\ \hline
\mathbf{4} & = & \mathbf{2} \times \mathbf{2} & & &
\end{array}$$

② 28 と 84 を先に求める時

$$\begin{array}{rclccc}
28 & = & 2 \times 2 & & & \times 7 \\
84 & = & 2 \times 2 & \times 3 & & \times 7 \\ \hline
28 & = & 2 \times 2 & & & \times 7
\end{array}$$

$$\begin{array}{rclccc}
28 & = & 2 \times 2 & & & \times 7 \\
60 & = & 2 \times 2 & \times 3 & \times 5 & \\ \hline
\mathbf{4} & = & \mathbf{2} \times \mathbf{2} & & &
\end{array}$$

③ 60 と 84 を先に求める時

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$\underline{84 = 2 \times 2 \times 3 \qquad \times 7}$$
$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$
$$\underline{28 = 2 \times 2 \qquad\qquad \times 7}$$
$$\mathbf{4} = \mathbf{2} \times \mathbf{2}$$

このように、最大公約数を求める時には、3 つの数の最大公約数を同時に求めても、また、計算する順序に関係なく、初めに 2 つの数の最大公約数を求めて、その最大公約数と残りの数の最大公約数を求めても、求める最大公約数は同じになることがわかります。

このことは、4 つ以上の数の時にも同じことがいえます。時間があれば、試しにやってみて、確かめてみましょう。

【お話 14】

互除法で３つ以上の数の最大公約数を求める方法

素因数分解を使って最大公約数を求める際(さい)に、いくつかの数の中から初めに２つの数の最大公約数を求めて、その最大公約数と残りの数で最大公約数を求めても、また、その計算の順序を変えても、正しく計算できることがわかりました。このことは、先に勉強した「ユークリッドの互除法」でも同じことがいえます。

互除法では、一度に最大公約数を求めることができるのは、２つの数ですから、３つ以上の数の最大公約数を求めるには、まず２つの数の最大公約数を求めて、その求まった最大公約数と３つ目の数で最大公約数を求めます。さらに、４つの数の最大公約数を求める場合には、それまでに求まっている３つの数の最大公約数と４つ目の数で最大公約数を求めます。このようにして元の数がいくつあるかに応じて、計算を必要なだけくり返して、最後に２つの数にして最大公約数を求めます。

これまでに、最大公約数を求める方法として、約数を書き出して比べる方法や、互除法や、素因数分解による方法を勉強してきました。それらのどの方法を使って最大公約数を求めるかは、どんな数の最大公約数を求めるかにより、自分にとって使い勝手のよい方法を選ぶとよいでしょう。

【問題 14】

次の問題をときましょう

■ 5 年生の香織(かおり)さんの学級では、学級会の時間に 2 年生と遊びの会をすることにしました。遊びの会では、できるだけ多くのグループを作って遊びたいと思います。それに、できれば 5 年生も 2 年生も同じ人数でグループを作りたいと思います。

でも、はたしてそのようなことはできるのでしょうか。もしできるとしたら、グループがいくつできて、1 つのグループに 5 年生と 2 年生はそれぞれ何人ずつになるのでしょうか。

5 年生は 32 人で、2 年生は 36 人です。

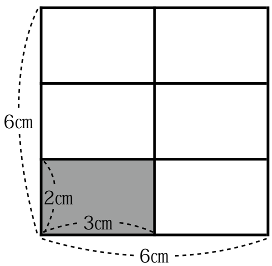
考えをメモしたり計算をするところ

結論（答え）：

公倍数(こうばいすう)と最小公倍数

【お話 15】

これまでは、長方形の中にできる正方形の話でしたが、ここからは、逆に正方形を作る長方形の話になります。



どのような大きさの正方形でも、必ずその正方形をいくつかの同じ大きさの長方形に区切ることができます。

例えば、一辺が 6㎝の正方形をたて方向に２つ、横方向に３つに区切ると、たて 2㎝、横 3㎝の長方形ができます。

これは、６の約数である２と３で、それぞれたて方向と横方向にわることで、やはり６の約数である３と２の長さに区切られたということです。

このことは、２や３から６を見れば、６は２の倍数でも３の倍数でもあるわけです。言いかえれば、６は２と３に共通な倍数なのです。この時、６のことを２と３の**公倍数(こうばいすう)**といいます。

この公倍数を求める問題は、普通は次のようになります。

> たて 2㎝、よこ 3㎝の長方形があります。この長方形を同じ向きに、たて、横にならべて正方形を作ります。１辺の長さが何㎝の時、正方形になるでしょうか。

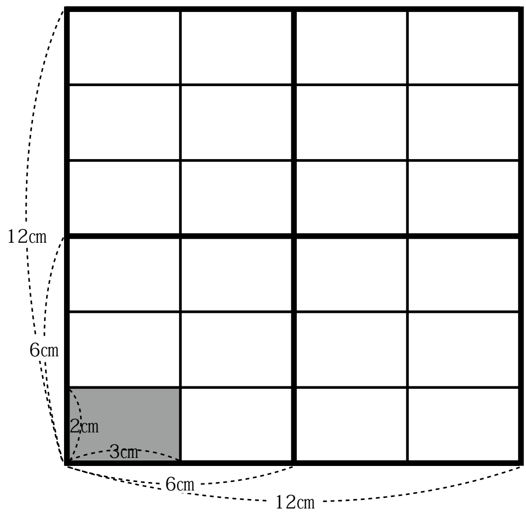
答えの求め方は、２と３のそれぞれの倍数を考えて、同じ数になれば、それを答えにします。つまり、２と３の公倍数を求めることになります。

２の倍数：0，２，４，⑥，８，10，……

３の倍数：0，３，⑥，……

したがって、０以外は６が２と３の共通の倍数、つまり公倍数です。答えは、「１辺が 6㎝の時、正方形になる」です。

ところで、正方形は、同じ大きさの正方形を４つ集めて、さらに大きな正方形にすることができます。そこで、１辺が６㎝の正方形で、より大きな正方形を作ってみましょう。



すると上図のような正方形ができます。これは、たて 2㎝と横 3㎝の長方形が、たてに６個、横に４個ならんでできたものです。この大きな正方形の一辺の長さは、12㎝です。

ここで、もう一度２の倍数と３の倍数を書き出してみると、

２の倍数：0，２，４，⑥，８，10，⑫，14，16，⑱，……

３の倍数：0，３，⑥，９，⑫，15，⑱，……

となり、12 も 18 も公倍数であったことがわかります。

ですから、２と３の公倍数は、０と６と 12 と 18 だということがわかりますが、これだけではなくて、さらにその続きがいくらでもありそうです。

前のページの１辺が 12㎝の正方形の図を見てわかることは、１辺が 6㎝の正方形が単位となって、たてや横にいくつならぶかということですから、どのような大きさの正方形の１辺の長さも、６の倍数になっているということです。確かに、12 や 18 は６の倍数です。

そこで０でない一番小さな公倍数がわかると、その公倍数を使って、元の数の公倍数をいくつでも書き出すことができることがわかります。

このように、０でない一番小さな公倍数には特別な役わりがあるので、この公倍数のことを特に**最小公倍数**といいます。

２と３の最小公倍数は６です。

【問題 15】

たて 4㎝、横 6㎝の長方形のタイルを、同じ向きに、たて、横にならべて正方形を作りたいと思います。１辺の長さが何㎝のとき、うまく正方形ができますか。

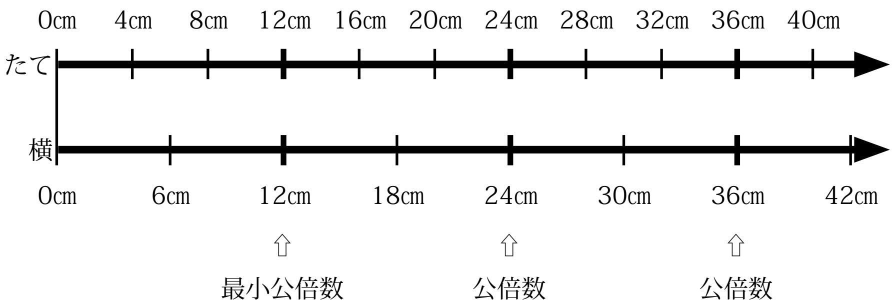
先生からタイルの紙をいただいて、班ごとに作業をしながら考えましょう。（用紙は 75 ページにあります）

考えたことや計算したことやしたことなどをメモするところ

正方形ができた時の１辺の長さ：

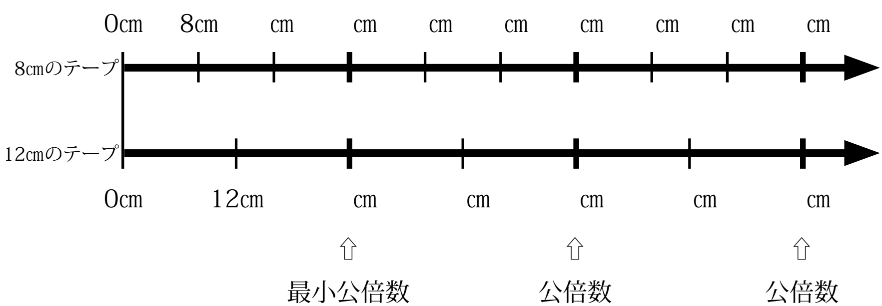
【問題 15】の答えは、12㎝，24㎝，36㎝，……などですね。つまり、12 が最小公倍数ですから、12 の倍数が答えになります。

この問題は数直線に置きかえて考えることもできます。次の数直線の上がたての長さの 4㎝の倍数、下が横の長さの 6㎝の倍数を表します。



【問題 16】

8㎝のテープと 12㎝のテープを左はしをそろえて、右横へならべていきます。初めて両方が同じ長さになるのは、何㎝の時でしょう。数直線をかいて、答えを見つけましょう。



答え：初めて両方が同じ長さになるのは＿＿＿＿㎝の時

【お話 16】

最小公倍数の求め方

2と3の公倍数について考えます。

この2つの数をかけてみましょう。2×3＝6ですが、3×2＝6でもよいわけです。

2×3の場合の6は、2の倍数であることを表し、3×2の場合の6は、3の倍数であることを表しています。そして、どちらも同じ6なのですから、6は2と3の公倍数といえます。

このことは、どんな2つの数を取り上げても言えることですから、2つの数の公倍数を1つ求める時には、2つの数を単にかけ合わせればよいことになります。

ただ公倍数の元になる最小公倍数を求めるとなると、2つの数を単にかけ合わせた積が、必ずしも最小公倍数になるとは限りません。

例えば、4と6の公倍数について考えてみると、4×6＝24ですが、24は最小公倍数ではありません。最小公倍数は12ですから、24は最小公倍数の2倍になっています。

では、なぜ2×3の場合は、積の6がそのまま最小公倍数になって、4×6の場合は、積の24は最小公倍数の2倍になってしまうのでしょうか。もし、そのわけがわかれば、2つの数の積から、最小公倍数を求めることができるかも知れません。そうすれば、とてもかん単に最小公倍数を求めることができそうです。

そのわけをさぐるために、それぞれの数を素因数分解してみましょう。

2と3の場合

2＝2

3＝3

4と6の場合

4＝2×2

6＝2×3

2と3の場合には、共通な素因数はありません。つまり、公約数は1のみで、1が最大公約数です。

4と6の場合は、共通な素因数2が1つあり、その2が最大公約数です。

ところで、4の倍数を作ろうとすると、4にどんな数をかけてもよいのですから、6から素因数をもらってきてかけてもよいわけです。そこで、かける数は、6の素因数である最大公約数の2だけでも、3だけでも、2と3の両方でもよいわけです。

他方、6の倍数を作ろうとすると、6にどんな数をかけてもよいのですから、4から素因数をもらってきてかけてもよいわけです。そこで、かける数は、4の素因数である最大公約数の2だけでも、もう一つの2だけでも、2と2の両方でもよいわけです。

ところが、最小公倍数を求めたいと思っているのですから、かけた結果が同じ数になり、しかもできるだけ小さな数になるようにする必要があります。

そこで、自分にも相手にもある共通な素因数はもらわないで、自分のを使うことにします。そして、相手にはあって自分にはない不足している素因数だけをもらってきます。

つまり、最大公約数の部分は自分のを使って、自分にない素因数のみを相手からもらいます。

確かにこのようにすれば、12 になり、4 と 6 の最小公倍数

4 の倍数　⇨　（②× 2）× 3 ＝ 12

6 の倍数　⇨　（②× 3）× 2 ＝ 12

最大公約数をのぞいて相手の素因数をすべてもらう。

と一ちします。

そこで、2 数の積と最小公倍数の 12 の 2 つを比べてみると、

4 × 6 ＝（②× 2）×（②× 3）＝②× 2 ×②× 3

12 ＝ ②× 2 × 3

4 × 6 からダブっている最大公約数②を 1 つはぶけば、最小公倍数が求まることがわかります。（はぶくには、②でわればよいのです。）

2 数の積（4 × 6）÷最大公約数（2）＝最小公倍数（12）

では、これまでのことを確かめる意味で、6 と 8 を例にもう一度考えてみましょう。

6 と 8 の公倍数を求める一番かん単な方法は、

6 × 8 ＝ 48（または 8 × 6 ＝ 48）

とすることです。なぜなら、6 × 8 の時の 48 は 6 の 8 倍の倍数、8 × 6 の時の 48 は 8 の 6 倍の倍数になり、48 が 6 と 8 の公倍数になるからです。

しかし、48 は 6 と 8 の最小公倍数ではありません。最小公倍数は、24 です。

6 の倍数：0，6，12，18，**24**，30，……

8 の倍数：0，8，16，**24**，32，……

ところで、

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \phantom{{}\times 2 \times 2} \times 3 \\ 8 &= 2 \times 2 \times 2 \end{aligned}$$

6 と 8 には、共通な素因数 2 が 1 つあり、その 2 が最大公約数です。

6 の倍数を作ろうとすると、6 にどんな数をかけてもよいのですから、8 から素因数をもらってきてかけてもよいわけです。そこで、もらってくる数は、最大公約数の 2 だけでも、2 が 2 つでも、2 が 3 つでもよいわけです。

他方、8 の倍数を作ろうとすると、8 にどんな数をかけてもよいのですから、6 から素因数をもらってきてかけてもよいわけです。そこで、もらってくる数は、最大公約数の 2 だけでも、3 だけでも、2 と 3 の両方でもよいわけです。

ところが、最小公倍数を求めたいと思っているのですから、かけた結果が同じ数になり、しかもできるだけ小さな数になるようにする必要があります。

そこで、自分にも相手にもある共通な素因数はもらわないで、自分のを使うことにします。そして、相手にはあって自分にはない不足している素因数だけをもらってきます。

つまり、最大公約数の部分は自分のを使って、自分にない素因数のみを相手からもらいます。

6 の倍数　⇨　（②× 3）× 2 × 2 ＝ 24

8 の倍数　⇨　（②× 2 × 2）× 3 ＝ 24

最大公約数をのぞいて相手の素因数をすべてもらう。

確かにこのようにすれば、24 になり、6 と 8 の最小公倍数と一ちします。

そこで、2 数の積と最小公倍数の 24 の 2 つを比べてみると、

6 × 8 ＝（②× 3）×（②× 2 × 2）＝②× 3 ×②× 2 × 2

24 ＝ ②× 3 × 2 × 2

6 × 8 からダブっている最大公約数②を 1 つはぶけば、最小公倍数が求まることがわかります。（はぶくには、②でわればよいのです。）

2 数の積（6 × 8）÷最大公約数（2）＝最小公倍数（24）

ちなみに、2 と 3 の最小公倍数が 2 と 3 の積そのままであるわけもわかりましたね。それは、2 と 3 の最大公約数が 1 だからですね。つまり式にすると、

2 × 3 ÷ 1 ＝ 6

です。

では、24 と 36 の最小公倍数を求めてみましょう。

まず初めに最大公約数を求めます。

$$\begin{array}{r|r|r} & 2 & 1 \\ \hline 12 & 24 & 36 \\ & 24 & 24 \\ \hline & 0 & 12 \end{array}$$

最大公約数は 12 です。

ですから最小公倍数は、

$$24 \times 36 \div 12 = 24 \times (36 \div 12) = 24 \times 3 = 72$$

<u>答え： 72</u>

【問題 17】

上の方法で、最小公倍数を求めましょう。

① 9 と 15

答え：＿＿＿＿

② 10 と 18

答え：＿＿＿＿

【お話 17】

素因数分解から直接最小公倍数を求める方法 (1)

それでは、他の方法で最小公倍数を求めてみましょう。

9 と 15 の場合は、次のように書いて答えを求めます。

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \times 3 \\ 15 &= 3 \qquad \times 5 \\ \hline &= 3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

> 3 を 1 つだけ下ろすことで、2 数の積 9 × 15 を最大公約数の 3 でわるのと同じことになります。

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \times 3 \\ 15 &= 3 \qquad \times 5 \\ \hline 45 &= 3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

3 は 9 と 15 の共通な素因数（最大公約数）なので、1 つだけ下へ下ろします。

この後は、次のようにたがいにない素因数をすべて下ろしていきます。

9 には 2 つ目の 3 があるので、この 3 を下ろします。

15 には 5 があるので、この 5 を下ろします。

まとめると、3 × 3 × 5 ＝ 45 となり、最小公倍数が 45 であることがわかります。

ここでも基本の考えは、2 数をかければ必ず公倍数になるけれども、二重にかける最大公約数はひとつだけにする、ということです。

【問題 18】

素因数分解を使って、最小公倍数を求めましょう。

① 24 と 36

24 ＝

36 ＝

＝

答え：最小公倍数は

② 12 と 18

12 ＝

18 ＝

＝

答え：最小公倍数は

③ 14 と 30

14 ＝

30 ＝

＝

答え：最小公倍数は

④ 30 と 40

30 ＝

40 ＝

＝

答え：最小公倍数は

【お話 18】

素因数分解から直接最小公倍数を求める方法 (2)

【問題 18】では、2 つの数の最小公倍数を求めましたが、今度は 3 つの数の最小公倍数を求める方法を考えてみましょう。

ここでは、6 と 9 と 12 とします。

ただ、今は 3 つの数の最小公倍数を求める方法がわからないのですから、まず初めに 6 と 9 の最小公倍数を求めて、その最小公倍数と 12 の最小公倍数を求めるという方法をとります。

6 と 9 の最小公倍数は、

$$
\begin{array}{rcl}
6 &=& 2 \times 3 \\
\underline{9} & \underline{=} & \underline{\phantom{2 \times{}} 3 \times 3} \\
18 &=& 2 \times 3 \times 3
\end{array}
$$

18 と 12 の最小公倍数は、

$$
\begin{array}{rcl}
18 &=& 2 \phantom{{}\times 2} \times 3 \times 3 \\
\underline{12} & \underline{=} & \underline{2 \times 2 \times 3 \phantom{{}\times 3}} \\
36 &=& 2 \times 2 \times 3 \times 3
\end{array}
$$

したがって、6 と 9 と 12 の最小公倍数は 36 のはずですが、この答えは正しいのでしょうか。それぞれの倍数を書きだして確かめてみましょう。

6 の倍数：0, 6, 12, 18, 24, 30, **36**, 42, ……

9 の倍数：0, 9, 18, 27, **36**, 45, ……

12 の倍数：0, 12, 24, **36**, 48, ……

確かに、6 と 9 と 12 の最小公倍数は 36 になりました。

答えがわかったので、下のように 3 つの数をならべて「36 ＝ 2 × 2 × 3 × 3」と書きこみました。

$$
\begin{array}{rcl}
6 &=& 2 \times \phantom{2 \times{}} 3 \\
9 &=& \phantom{2 \times 2 \times{}} 3 \times 3 \\
12 &=& 2 \times 2 \times 3 \\
\hline
36 &=& 2 \times 2 \times 3 \times 3
\end{array}
$$

これを見ると次のことがわかります。

6 と 9 と 12 の共通な素因数は 3 で、下に 1 つ下ろします。9 の 2 つ目の 3 と、12 の 2 つ目の 2 は、他の 2 つにはない素因数ですから下に下ろします。6 と 12 の 1 つ目の 2 は、9 にはありませんが下に 1 つ下ろします。

つまり、素因数が「（一ヶ所でも）**重なったら 1 つを、**（全く）**重ならなくても 1 つを**」下に下ろすということです。

> 6 と（9 と）12 の一つ目 2 を 2 段階にして見ると、6 と 9 では「重ならないので 1 つを」、その 1 つと 12 では「重なるので 1 つを」ということになり、結局、2 はひとつだけ下に下ろすことになります。

このそう作を、式で比べて確かめてみましょう。

$$
\begin{array}{rcl}
6 \times 9 \times 12 &=& (\overset{\bullet}{2} \times \overset{\circ}{3}) \times (\overset{\circ}{3} \times \overset{\circ}{3}) \times (\overset{\bullet}{2} \times \overset{\bullet}{2} \times \overset{\circ}{3}) \\
36 &=& \overset{\bullet}{2} \times \overset{\bullet}{2} \times \overset{\circ}{3} \times \overset{\circ}{3}
\end{array}
$$

すると、最小公倍数 36 の方が、2 が 1 つ、3 が 2 つ少ないことが分かります。そうなるのは、「6 と 12 の公約数の 2」のうち 1 つだけを、「3 つの数の公約数の 3」のうち 1 つだけを下に下ろしたからです。

【質問 5】

ところで、2 つの数の時は、

2 数の積÷最大公約数＝最小公倍数

が成り立ちましたが、3 つの数の時、

3 数の積÷最大公約数＝最小公倍数

が成り立つのでしょうか。あなたはどう思いますか。

予想

ア	成り立つ	（　　）人
イ	成り立たない	（　　）人
ウ	成り立つ時と成り立たない時がある	（　　）人

そう考えたわけも書きましょう。

話し合い

みんなの考えを出し合いましょう。

それでは、実際に計算をして確かめてみましょう。

① $2 = 2$

$4 = 2 \times 2$

$\underline{6 = 2 \quad \times 3}$ 　　$\boxed{\text{同じ素因数がある}}$

$12 = 2 \times 2 \times 3$

3 数の積÷最大公約数は

$2 \times 4 \times 6 \div 2 = 24$ 　よって成り立ちません。

② $2 = 2$

$5 = \qquad 5$

$\underline{6 = 2 \times 3}$ 　　$\boxed{\text{同じ素因数がある}}$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

3 数の積÷最大公約数は

$2 \times 5 \times 6 \div 1 = 60$ 　よって成り立ちません。

③ $2 = 2$

$5 = \qquad 5$

$\underline{21 = \quad 3 \quad \times 7}$ 　　$\boxed{\text{同じ素因数はない}}$

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

3 数の積÷最大公約数は

$2 \times 5 \times 21 \div 1 = 210$ 　よって成り立ちます。

④ $2 = 2$

$3 = \quad 3$

$\underline{5 = \qquad 5}$ 　　$\boxed{\text{同じ素因数はない}}$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

3 数の積÷最大公約数は

$2 \times 3 \times 5 \div 1 = 30$ 　よって成り立ちます。

「3 数の積÷最大公約数＝最小公倍数」が成り立つ時は、同じ素因数を持たない時です（2 数の「たがいに素（そ）」のようなもの）。逆に成り立たない時は、同じ素因数を 1 つでも持っている時です。

このように、「3 数の積÷最大公約数＝最小公倍数」という式は、いつも成り立つわけではないのでまちがいです。明らかに同じ素因数を持たないことがわかる場合は、この式を使うというよりも、3 つの数をかけ合わせばよいのです。

【問題 19】

素因数分解を使って、最小公倍数を求めましょう。

① 18 と 24 と 30

18 ＝

24 ＝

30 ＝

＝

答え：最小公倍数は

② 8 と 36 と 60

8 ＝

36 ＝

60 ＝

＝

答え：最小公倍数は

最小公倍数を求めたい時、数を見ただけで答えがわかる場合があります。

例えば、12 と 60 ですと、大きい方の数の 60 です。実際に素因数分解を用いて最小公倍数を求めてみると、

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$
$$\underline{60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5}$$
$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

となります。60 は 12 と比べて「× 5」の部分だけ素因数が多くあります。これは、12 の 5 倍が 60 ということですね。ですから、60 は 12 の倍数です。

このように、大きい方の数が小さい方の数の倍数になっていれば、大きい方の数が最小公倍数です。また、3 つ以上の数の場合には、一番大きい数が他の数の倍数になっていれば、その一番大きい数が最小公倍数です。

【問題 20】

次の数の最小公倍数を求めましょう。

① 8 と 24

（　　）は（　　）の倍数なので、最小公倍数は（　　）です。

② 9 と 72

（　　）は（　　）の倍数なので、最小公倍数は（　　）です。

③ 6 と 9 と 54

（　　）は（　　）と（　　）のそれぞれの倍数なので、

最小公倍数は（　　）です。

３つ以上の数の最小公倍数を求める場合は、さらに便利な考えがあります。

例えば、6 と 8 と 12 の場合、12 は 6 の倍数なのですから、12 の倍数は必ず 6 の倍数になります。そこで、この場合には、8 と 12 の最小公倍数を求めればよいことになります。

このことを確かめてみましょう。

$$\begin{array}{rcllll}
6 &=& 2 & & & \times 3 \\
8 &=& 2 & \times 2 & \times 2 & \\
12 &=& 2 & \times 2 & & \times 3 \\ \hline
24 &=& 2 & \times 2 & \times 2 & \times 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcllll}
8 &=& 2 & \times 2 & \times 2 & \\
12 &=& 2 & \times 2 & & \times 3 \\ \hline
24 &=& 2 & \times 2 & \times 2 & \times 3
\end{array}$$

どちらも最小公倍数は 24 になります。

【問題 21】

次の場合の最小公倍数の求め方を説明しましょう。

① 16 と 24 と 32

（　　）は（　　）の倍数なので、最小公倍数は（　　）と（　　）の２数で求まります。

② 6 と 12 と 30

（　　）は（　　）の倍数なので、最小公倍数は（　　）と（　　）の２数で求まります。

または、（　　）は（　　）の倍数なので、最小公倍数は（　　）と（　　）の２数で求まります。

最小公倍数が元の数の積になる場合があります。これは、共通の素因数がない時でしたね。（2 数の場合は最大公約数の 1 でわるということです）

$$
\begin{aligned}
15 &= \phantom{2 \times 2 \times{}} 3 \times 5 \\
\underline{28} &\underline{{}= 2 \times 2 \phantom{{}\times 3 \times 5} \times 7} \\
420 &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7
\end{aligned}
$$

【問題 22】

素因数分解を使って、最小公倍数を求めましょう。

① 14 と 15

14 ＝

15 ＝

＝

答え：最小公倍数は＿＿＿

② 12 と 35

12 ＝

35 ＝

＝

答え：最小公倍数は＿＿＿

③ 8 と 9 と 25

8 ＝

9 ＝

25 ＝

＝

答え：最小公倍数は＿＿＿

【お話 19】

素因数分解を使って、最大公約数と最小公倍数を一度に書き表す方法

もしも、素因数分解を使って、一度に最大公約数と最小公倍数を求めようとすると、次のように書くといいでしょう。

$$
\begin{array}{l}
12 = 2 \times 2 \times 3 \qquad \leftarrow \text{最大公約数} \\
\hline
24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\
36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\
\hline
72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \qquad \leftarrow \text{最小公倍数}
\end{array}
$$

ちなみに、最大公約数と最小公倍数が正しいかどうかを確かめるには、

２数の積÷最大公約数＝最小公倍数

でしたから、２数の積と、最大公約数と最小公倍数の積が同じになるはずです。

２数の積＝最大公約数×最小公倍数

$$24 \times 36 = 12 \times 72$$

それぞれの数を素因数で書くと

$$(2 \times 2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3 \times 3)$$

$$= (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3)$$

「素因数分解を使って、最大公約数と最小公倍数を一度に書き表す方法」と見比べながら、この式が正しいことを確かめておきましょう。

【付録のお話】

最小公倍数を頭の中で求める方法

この方法は、それぞれの倍数を書きならべて、最小の共通な倍数を見つける方法を元にしています。ただ、頭の中に2つ以上の数の倍数を同時に思いうかべることはできないので、工夫する必要があります。

最もよい方法は、大きい方の数の倍数を順番に考えて、その数が、小さい方の数の倍数になっているかどうかを調べるやり方です。

例えば9と12の場合は、

「12は9の倍数ではない」
「24も9の倍数ではない」
「36は9×4＝36だから、9の4倍の倍数」

と考えて、最小公倍数の36を見つけます。

でもこの方法が一番速いというわけではありません。これまでに勉強したいろいろな方法や考え方の中から、それぞれの問題に最もふさわしいやり方を選んで使えるようになった時、どんな問題にも速く正確に答えられるようになるのです。

【問題 23】

⑴レンガは、ふ通、21cm、10cm、6cm の直方体をしています。このレンガを同じ方向に積み重ねて立方体にしようと思います。一番小さい立方体の 1 辺の長さは何 cm になるでしょうか。

〈考えたことや式を書くところ〉

答え：＿＿＿＿＿＿＿＿

⑵ ⑴の立方体を作るには、レンガはいくつ必要ですか。

〈考えたことや式を書くところ〉

答え：＿＿＿＿＿＿＿＿

⑶ レンガを 1 個 126 円で売っているお店を見つけました。大量にレンガを買うということで、1 個 100 円にしてもらいました。⑴の立方体を作るにはいくらかかるでしょうか。

また、あなたなら⑴の立方体を作りますか。

〈考えたことや式を書くところ〉

費用：＿＿＿＿＿＿＿＿

あなたならこの立方体を

（ 作る　　あきらめる ）

【問題 24】

これは難問です：「鹿おどし」という水の道具があります。上を向いた竹のつつに水がたまると、その重みで下向きに回転し、水がこぼれると軽くなって元にもどります。その時の勢いで、反対側のつつが、地面の石に当たり音をたてます。

この鹿おどしを 2 つ作って、6 分ごとに音がちょうど重なるように設計したいと思います。一つを 30 秒ごとに音をたてるように設計すると、もう一つは何秒ごとに音をたてるように設計するとよいでしょうか。

ただし、6 分（360 秒）ごとに動く設計はしません。

京都詩仙堂の鹿おどし

〈考えたことを書くところ〉

答え：＿＿＿＿＿＿＿＿

【問題 24】の答え

問題を解(と)くには、これまでに習ったことを使えば、いろいろな方法が考えられますが、ここでは、素因数分解を使って解(と)いてみましょう。

わかっている数字は 30 秒ですから、

$$
\begin{array}{r l}
= & \\
\underline{30} & \underline{= 2 \times 3 \times 5 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
= &
\end{array}
$$

とまず書きましょう。次に最小公倍数の 360 を素因数分解して書きますが、360 は 30 の倍数なのですから、必ず 2 × 3 × 5 をふくみます。ですから、30 の 2 × 3 × 5 を下ろしてきて、それを初めに書いてから、残りの素因数を書きます。

$$
\begin{array}{r l}
= & \\
\underline{30} & \underline{= 2 \times 3 \times 5 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
360 & = 2 \times 3 \times 5 \times (2 \times 2 \times 3)
\end{array}
$$

すると、答えとして求めたいもう一つの数が、(2 × 2 × 3) という素因数をふくんでいることがわかります。

$$
\begin{array}{r l}
= & \qquad\qquad\qquad \times (2 \times 2 \times 3) \\
\underline{30} & \underline{= 2 \times 3 \times 5 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
360 & = 2 \times 3 \times 5 \times (2 \times 2 \times 3)
\end{array}
$$

ところで、この時、気をつけなくてはならないことは、(2 × 2 × 3) の中のどの素因数も、30 の素因数である 2 と 3 の上にならべてはいけないということです。もしならべてしまうと、360 の素因数でなくなってしまいます。ですから、30 の素因数である 2 と 3 の上にも、必ず 2 と 3 の素因数がなくてはならないことになります。

$$
\begin{array}{rl}
 & = 2 \times 3 \qquad\quad \times (2 \times 2 \times 3) \\
 & \underline{30 = 2 \times 3 \times 5 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & 360 = 2 \times 3 \times 5 \times (2 \times 2 \times 3)
\end{array}
$$

ところで、30 の素因数である 5 の上にも 5 が入るかどうかですが、もしも 5 を入れてしまうと、求めようとしているもう一つの数が 360 になってしまい、これは 6 分のことですから、答えから省くことになります。ですから、求める数に素数の 5 はふくめません。

完成させると、

$$
\begin{array}{rl}
 & 72 = 2 \times 3 \qquad\quad \times (2 \times 2 \times 3) \\
 & \underline{30 = 2 \times 3 \times 5 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & 360 = 2 \times 3 \times 5 \times (2 \times 2 \times 3)
\end{array}
$$

となり、求める答えは 72 秒になります。

7ページ【作業1】で使います。　　　　　　　　名前（　　　　　　　　　　　　　）

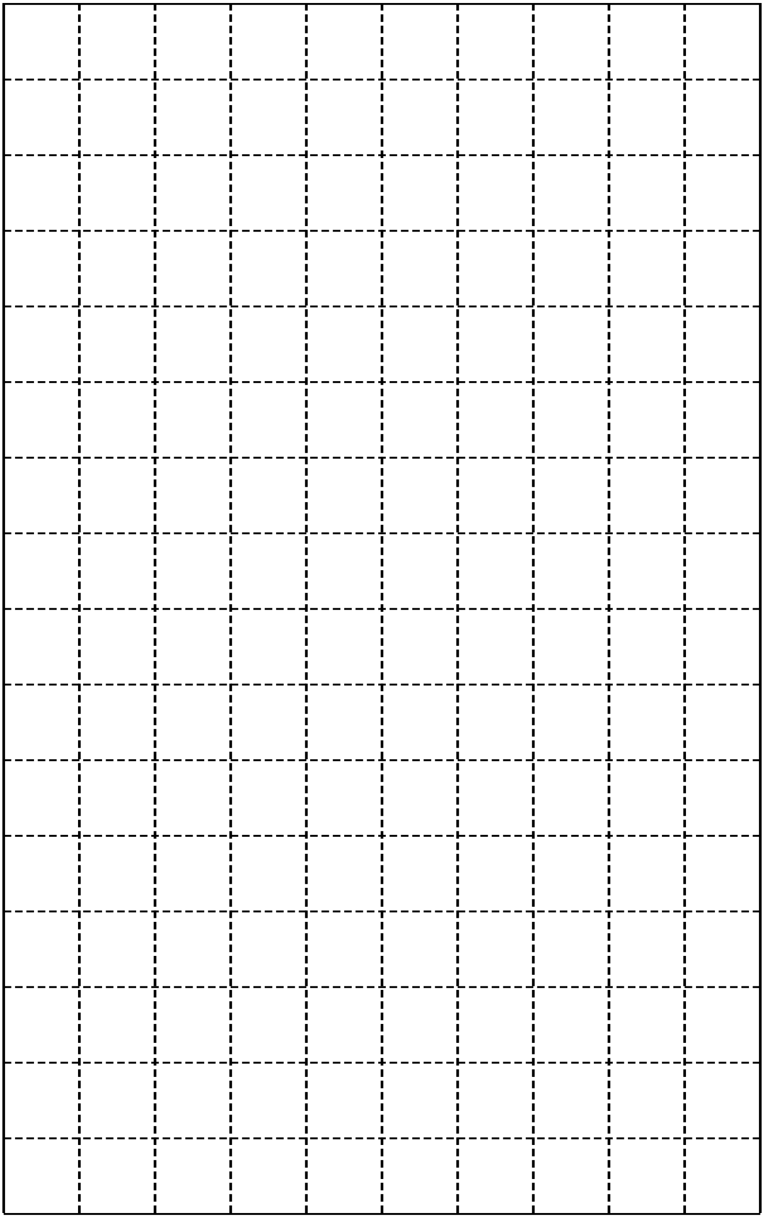
エラトステネスのふるい

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

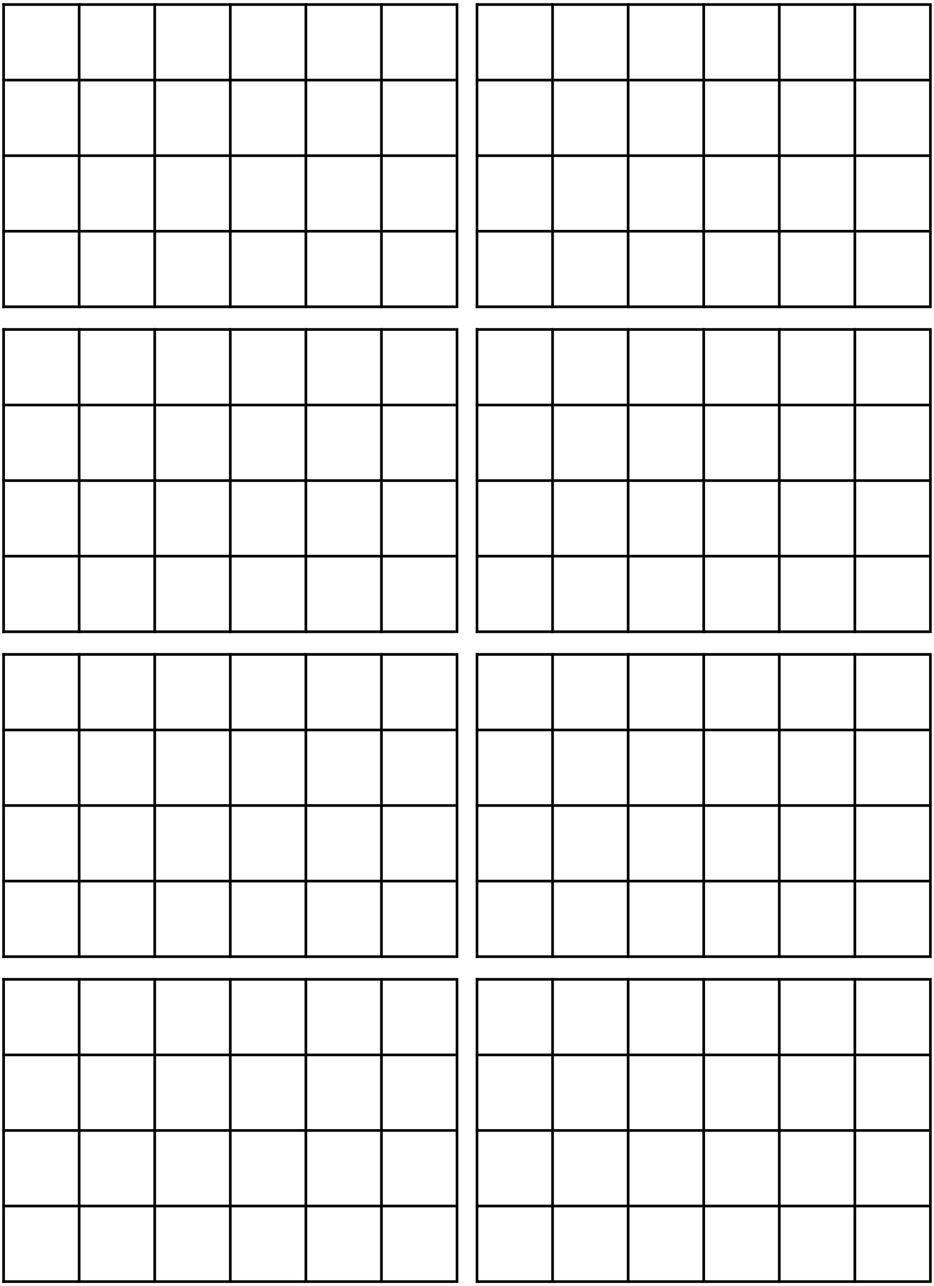
15ページ【問題5】で使います。1人につき最低このページ1枚必要ですが、余分に印刷しておきます。

注意：えん筆で区切りの線を引いてから切り分けましょう。

21 ページで使います。実際に切り取る図形です。



48 ページ【問題 15】で使います。たて 4㎝、横 6㎝のタイルが 8 まい分あります。



解答集

【問題 2】

17 ÷ 2 ＝ 8 あまり 1

17 ÷ 3 ＝ 5 あまり 2

17 ÷ 5 ＝ 3 あまり 2

17 ÷ 7 ＝ 2 あまり 3

答え：17 は（素数）です。

【問題 3】

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97

答え：100 までの素数の数 （25）個

【問題 4】

42 ＝ 6 × 7 ＝ 2 × 3 × 7

42 の素因数は（　2 と 3 と 7　）です。

55 ＝ 5 × 11

55 の素因数は（　5 と 11　）です。

72 ＝ 8 × 9 ＝ 2 × 2 × 2 × 3 × 3

72 の素因数は（　2 が 3 つと 3 が 2 つ　）です。

64 ＝ 8 × 8 ＝ 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2

64 の素因数は（　2 が 6 つ　）です。

91 ＝ 7 × 13

91 の素因数は（　7 と 13　）です。

【問題 6】

12 の約数：1，2，3，4，6，12

20 の約数：1，2，4，5，10，20

公約数は、1 と 2 と 4

答え：1 辺の長さが（　1，2，4　）㎝

の正方形に分けることができる。

【問題 7】

①6 と 12

6 の約数：1，2，3，6

12 の約数：1，2，3，4，6，12

6 と 12 の公約数：1，2，3，6

6 と 12 の最大公約数：6

②8 と 20

8 の約数：1，2，4，8

20 の約数：1，2，4，5，10，20

8 と 20 の公約数：1，2，4，

8 と 20 の最大公約数：4

③9 と 12

9 の約数：1，3，9

12 の約数：1，2，3，4，6，12

9 と 12 の公約数：1，3

9 と 12 の最大公約数：3

【問題 8】

①15 と 9

15 − 9 = 6

9 − 6 = 3

6 − 3 = 3

答え：<u>最大公約数は　3</u>

②20 と 12

20 − 12 = 8

12 − 8 = 4

8 − 4 = 4

答え：<u>最大公約数は　4</u>

③25 と 15

25 － 15 ＝ 10

15 － 10 ＝ 5

10 － 5 ＝ 5

答え：<u>最大公約数は　5</u>

【問題 9】

① 8 と 12

12 ÷ 8 ＝ 1 あまり 4

8 ÷ **4** ＝ 2

答え：<u>最大公約数は　4</u>

② 10 と 16

16 ÷ 10 ＝ 1 あまり 6

10 ÷ 6 ＝ 1 あまり 4

6 ÷ 4 ＝ 1 あまり 2

4 ÷ **2** ＝ 2

答え：<u>最大公約数は　2</u>

③ 10 と 24

24 ÷ 10 ＝ 2 あまり 4

10 ÷ 4 ＝ 2 あまり 2

4 ÷ **2** ＝ 2

答え：<u>最大公約数は　2</u>

④ 12 と 30

30 ÷ 12 ＝ 2 あまり 6

12 ÷ **6** ＝ 2

答え：<u>最大公約数は　6</u>

【問題 10】

① 8 と 12

$$
\begin{array}{rrr}
 & 2 & 1 \\
4\,) & \overline{\;8\;} & \overline{)\,12} \\
 & \underline{8} & \underline{8} \\
 & 0 & 4
\end{array}
$$

答え：<u>最大公約数は　4</u>

② 10 と 16

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 10 & 16 \\ & 4 & 4 & 6 & 10 \\ \hline & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

答え：最大公約数は　2

③ 10 と 24

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 10 & 24 \\ & 4 & 8 & 20 \\ \hline & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

答え：最大公約数は　2

④ 12 と 20

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 2 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 8 & 12 & 20 \\ & 8 & 8 & 12 \\ \hline & 0 & 4 & 8 \end{array}$$

答え：最大公約数は　4

【問題 11】

① 24 と 36

$$\begin{array}{l} 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ \underline{36 = 2 \times 2 \qquad\;\; \times 3 \times 3} \\ 12 = 2 \times 2 \qquad\;\; \times 3 \end{array}$$

答え：最大公約数は　12

② 45 と 63

$$\begin{array}{l} 45 = 3 \times 3 \times 5 \\ \underline{63 = 3 \times 3 \qquad \times 7} \\ \;\;9 = 3 \times 3 \end{array}$$

答え：最大公約数は　9

③ 48 と 60 と 72

$$\begin{array}{l} 48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 60 = 2 \times 2 \qquad\qquad \times 3 \times 5 \\ \underline{72 = 2 \times 2 \times 2 \qquad \times 3 \times 3} \\ 12 = 2 \times 2 \qquad\qquad \times 3 \end{array}$$

答え：<u>最大公約数は　12</u>

④ 28 と 60 と 84

$$\begin{array}{l} 28 = 2 \times 2 \qquad\qquad \times 7 \\ 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ \underline{84 = 2 \times 2 \times 3 \qquad \times 7} \\ \ \ 4 = 2 \times 2 \end{array}$$

答え：<u>最大公約数は　4</u>

【問題 12】

① 25 と 100

（ 100 ）は（ 25 ）でわり切れるので、最大公約数は（ 25 ）です。

② 18 と 36

（ 36 ）は（ 18 ）でわり切れるので、最大公約数は（ 18 ）です。

③ 14 と 42 と 70

（ 70 ）と（ 42 ）は（ 14 ）でわり切れるので、

最大公約数は（ 14 ）です。

【問題 13】

① 12 と 35

$$\begin{array}{l} 12 = 2 \times 2 \times 3 \\ \underline{35 = \qquad\qquad\quad 5 \times 7} \\ \ \ 1 = 1 \end{array}$$

答え：<u>最大公約数は　1</u>

② 27 と 28 と 30

27 ＝ 3 × 3 × 3

28 ＝ 2 × 2 × 7

30 ＝ 2 × 3 × 5

1 ＝ 1

答え：最大公約数は　1

【問題 14】

5 年生も 2 年生も同じ数でわり切れれば、それぞれ同じ人数のグループがその数だけできるのだから、公約数を求めればよいし、できるだけ多くのグループを作りたいのだから、最大公約数を求めればよい。そこで、

32 ＝ 2 × 2 × 2 × 2 × 2

36 ＝ 2 × 2 × 3 × 3

4 ＝ 2 × 2

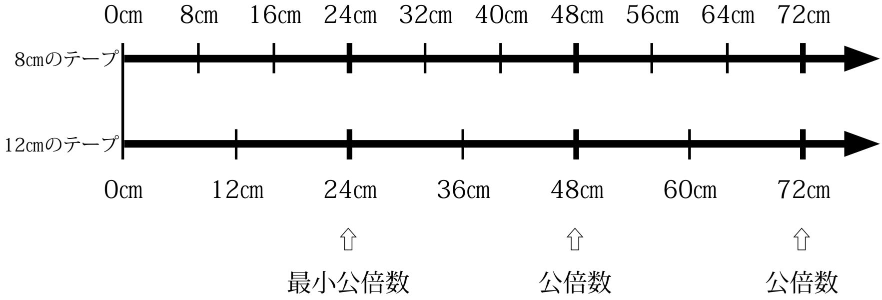
最大公約数 4 はグループの数だから、それぞれのグループの人数は、

5 年生：32 人÷ 4 グループ＝ 8 人 / グループ

2 年生：36 人÷ 4 グループ＝ 9 人 / グループ

結論：作りたいグループができる。4 つのグループで、5 年生 8 人、2 年生 9 人ずつになる。

【問題 16】



答え：初めて両方が同じ長さになるのは 24cmの時

【問題 17】

① 9 と 15

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 2 & 1 & 1 \\ \hline
3) & 6) & 9) & 15 \\
 & \underline{6} & \underline{6} & \underline{9} \\
 & 0 & 3 & 6
\end{array}
$$

$9 \times 15 \div 3 = 9 \times (15 \div 3) = 9 \times 5 = 45$

答え：　45

② 10 と 18

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 4 & 1 & 1 \\ \hline
2) & 8) & 10) & 18 \\
 & \underline{8} & \underline{8} & \underline{10} \\
 & 0 & 2 & 8
\end{array}
$$

$10 \times 18 \div 2 = 10 \times (18 \div 2) = 10 \times 9 = 90$

答え：　90

【問題 18】

① 24 と 36

$$
\begin{array}{l}
24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\
\underline{36 = 2 \times 2 \phantom{{}\times 2} \times 3 \times 3} \\
72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3
\end{array}
$$

答え：最小公倍数は　72

② 12 と 18

$$
\begin{array}{l}
12 = 2 \times 2 \times 3 \\
\underline{18 = 2 \phantom{{}\times 2} \times 3 \times 3} \\
36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3
\end{array}
$$

答え：最小公倍数は　36

③ 14 と 30

$$
\begin{array}{l}
14 = 2 \phantom{{}\times 3 \times 5} \times 7 \\
\underline{30 = 2 \times 3 \times 5 \phantom{{}\times 7}} \\
210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7
\end{array}
$$

答え：最小公倍数は　210

④ 30 と 40

$$\begin{array}{rl} 30 = & 2 \qquad\qquad\quad \times 3 \times 5 \\ \underline{40 =} & \underline{2 \times 2 \times 2 \qquad \times 5} \\ 120 = & 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

答え：<u>最小公倍数は　120</u>

【問題 19】

① 18 と 24 と 30

$$\begin{array}{rl} 18 = & 2 \qquad\qquad\quad \times 3 \times 3 \\ 24 = & 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ \underline{30 =} & \underline{2 \qquad\qquad\quad \times 3 \qquad \times 5} \\ 360 = & 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \end{array}$$

答え：<u>最小公倍数は　360</u>

② 8 と 36 と 60

$$\begin{array}{rl} 8 = & 2 \times 2 \times 2 \\ 36 = & 2 \times 2 \qquad \times 3 \times 3 \\ \underline{60 =} & \underline{2 \times 2 \qquad \times 3 \qquad \times 5} \\ 360 = & 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \end{array}$$

答え：<u>最小公倍数は　360</u>

【問題 20】

① 8 と 24

（ 24 ）は（ 8 ）の倍数なので、最小公倍数は（ 24 ）です。

② 9 と 72

（ 72 ）は（ 9 ）の倍数なので、最小公倍数は（ 72 ）です。

③ 6 と 9 と 54

（ 54 ）は（ 6 ）と（ 9 ）のそれぞれの倍数なので、

最小公倍数は（ 54 ）です。

【問題 21】

① 16 と 24 と 32

（ 32 ）は（ 16 ）の倍数なので、最小公倍数は（ 24 ）と（ 32 ）の２数で求まります。

② 6 と 12 と 30

（12）は（6）の倍数なので、最小公倍数は（12）と（30）の２数で求まります。

または、（30）は（6）の倍数なので、最小公倍数は（12）と（30）の２数で求まります。

【問題 22】

① 14 と 15

14 ＝ 2 × 7
15 ＝ 3 × 5
210 ＝ 2 × 3 × 5 × 7

答え：最小公倍数は　210

② 12 と 35

12 ＝ 2 × 2 × 3
35 ＝ 5 × 7
420 ＝ 2 × 2 × 3 × 5 × 7

答え：最小公倍数は　420

③ 8 と 9 と 25

8 ＝ 2 × 2 × 2
9 ＝ 3 × 3
25 ＝ 5 × 5
1800 ＝ 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 5

答え：最小公倍数は　1800

【問題 23】

⑴ 21 と 10 と 6 の最小公倍数を求めればよいので、素因数分解の方法を使うと、

$$
\begin{array}{rl}
21 = & \quad 3 \quad \times 7 \\
10 = & 2 \quad \times 5 \\
\underline{6 =} & \underline{2 \times 3 \qquad\quad} \\
210 = & 2 \times 3 \times 5 \times 7
\end{array}
$$

答え：＿210cm＿

⑵ 210cm をレンガの 1 こあたりのそれぞれの長さでわれば、たて・よこ・高さをうめるレンガの個数が求まるので、

210cm ÷ 21cm/ 個＝ 10 個
210cm ÷ 10cm/ 個＝ 21 個
210cm ÷ 6cm/ 個＝ 35 個

かけあわせて

10 個× 21 × 35 ＝ 7350 個

答え：＿7350 個＿

⑶ 100 円 / 個× 7350 個＝ 735000 円

費用：＿735000 円＿

あなたならこの立方体を
（ 作る　あきらめる ）←自分の考えであればよいのでどちらでもよい

【感想】

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

⑴この勉強は、楽しかったですか。

ア　楽しかった

イ　楽しくもつまらなくもなかった

ウ　楽しくなかった

⑵テキストの説明はわかりやすかったですか。

ア　わかりやすかった

イ　どちらとも言えない

ウ　わかりにくかった

感想があれば、書いてみましょう。

参考・研究文献
○「わかる さんすうの教え方 5」（遠山啓 / 銀林浩 編　むぎ書房刊）
○「わかる さんすう 5」（遠山啓監修　むぎ書房刊）
○「分数の旅」（榊忠男監修　鈴木一己著　太郎次郎社）
○「算数大好きにする意味の授業　26 章」
（笠井一郎・西尾恒敬・畑野和子著　あゆみ出版）
○「いきいき算数 6 年の授業」（秋田敏文著　ひまわり社）